Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie"
SS 2008 Blatt 2

Ausgabe: 02.05.2008, **Abgabe:** 09.05.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 2.1: Sind die folgenden Zahlen ganz über $\mathbb{Z}$?

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \qquad \frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}} \qquad \frac{3+2\rho}{1+\rho}$$

Dabei ist $\rho = e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.2: Sei A ein Ring mit der folgenden Eigenschaft: Jeder Untermodul eines freien Moduls ist wieder frei. Zeigen Sie, dass A dann ein Hauptidealring ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 2.3:

(a) Wir betrachten die additive Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ kein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.

(b) Wir betrachten nun die multiplikative Gruppe der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ebenfalls kein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.4: Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung, x ein Element aus A. Zeigen Sie: Wenn x invertierbar in B ist, dann ist x auch invertierbar in A.

(2 Punkte)