Übungen zur Vorlesung “Algebraische Zahlentheorie”
SS 2008 Blatt 3

Ausgabe: 09.05.2008, **Abgabe:** 23.05.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Sei θ eine Wurzel von $x^3 - 2x + 5$. Berechnen Sie Norm und Spur von $2\theta - 1$ in $\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Betrachten Sie die durch die folgende Matrix gegebene symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{Q}^3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$. Bestimmen Sie die duale Basis.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3: Wir betrachten das Polynom $f(x) = x^3 + px + q$. Bestimmen Sie die Diskriminante $D(1, x, x^2)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.4: Ist der Ring $\mathbb{Z}[t]/(t^2 + 4)$ ganz abgeschlossen? Begründen Sie durch Beweis oder Gegenbeispiel.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.5: Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ein Zahlkörper vom Grad n. Zeigen Sie: Die Diskriminante $D(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1})$ ist durch den Ausdruck

$$\prod_{i<j} \big(\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)\big)^2$$

gegeben, wobei $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : K \to \overline{\mathbb{Q}}$ die verschiedenen Einbettungen von K in den algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ sind.
Hinweis: Benutzen Sie die Determinanten-Formel für Vandermonde-Matrizen.

(4 Punkte)