Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie" SS 2008 Blatt 5

Ausgabe: 30.05.2008, **Abgabe:** 06.06.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Ideale in einem Ring R.

(a) Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})$$

(b) Sei nun R ein Dedekindring. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}), \qquad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2:

(a) Formulieren Sie das Gauß'sche Reziprozitätsgesetz (mit Literaturangabe).

(b) Benutzen Sie das Reziprozitätsgesetz, um die folgenden Legendre-Symbole zu berechnen:

$$\left(\frac{6}{11}\right), \qquad \left(\frac{18}{23}\right), \qquad \left(\frac{205}{307}\right).$$

(c) Ist (2311) prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{1965}]$?

(8 Punkte)

Aufgabe 5.3: Geben Sie die Primidealfaktorisierungen der Ideale (5) und (7) in $\mathbb{Z}[\rho]$ an, wobei ρ eine dritte Einheitswurzel ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5.4: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Geben Sie die Primidealfaktorisierungen der Ideale (7) und (31) in $\mathcal{O}_K$ an. Dabei dürfen Sie annehmen, daß $(1, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2)$ eine Basis von $\mathcal{O}_K$ ist. Erläutern Sie, wo genau diese Voraussetzung benutzt wird.

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 5.5: Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper vom Grad n, und seien $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{O}_K$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Wir setzen $\Delta = D(b_1, \ldots, b_n)$. Zeigen Sie, daß für jedes $x \in \mathcal{O}_K$ gilt $\Delta x \in \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_{\mathbb{Z}}$.

(4 Punkte)