Übungen zur Vorlesung “Algebraische Zahlentheorie” SS 2008 Blatt 6

Ausgabe: 06.06.2008, **Abgabe:** 13.06.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: Sei K ein Zahlkörper. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_K$ unendlich viele Primideale hat.

(2 Punkte)

Aufgabe 6.2:

(a) Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper vom Grad n. Berechnen Sie für $m \in \mathbb{Z}$ die Norm des Ideals (m) in $\mathcal{O}_K$.

(b) Bestimmen Sie alle Ideale in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{43})}$, die Norm höchstens 7 haben.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.3: Zeigen Sie, dass die Gleichung $a^2 - 47b^2 = \pm 19$ Lösungen in den ganzen Zahlen hat. Betrachten Sie dazu den Ganzheitsring von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{47})$:

(a) Geben Sie die Minkowski-Schranke für $\mathcal{O}_K$ an, und bestimmen Sie alle Ideale von $\mathcal{O}_K$, deren Norm unterhalb der Minkowski-Schranke liegt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{47})$ gleich 1 ist, indem Sie ein Element mit der Norm 2 finden.

(c) Geben Sie die Primidealfaktorisierung von (19) in $\mathcal{O}_K$ an.

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass in $\mathcal{O}_K$ ein Element mit der Norm ± 19 existieren muss. Wie erhält man die Lösungen der Ausgangsgleichung?

(10 Punkte)

Aufgabe 6.4: Sei A ein Dedekindring. Zeigen Sie, dass jedes Ideal von A von zwei Elementen erzeugt werden kann.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 6.5: Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ein Zahlkörper, $f = \mathrm{Min}(\theta)$ das Minimalpolynom von θ, und p eine Primzahl mit $p \nmid D(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1})$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bonus-Aufgabe 5.5, dass dann gilt

$$\mathcal{O}_K/(p) \cong \mathbb{F}_p[\theta]/(\mathrm{Min}(\theta)).$$

(6 Punkte)