Übungen zur Vorlesung “Algebraische Zahlentheorie”
SS 2008 Blatt 7

Ausgabe: 13.06.2008, **Abgabe:** 20.06.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$, wobei θ eine Wurzel von $x^3 - 2x - 3$ ist. Bestimmen Sie ein Inverses zu $(-\theta^2 - 2\theta - 2)$ in $\mathcal{O}_K$.

(2 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei K ein Zahlkörper. Benutzen Sie Lemma 3.12, um zu zeigen, dass die Gruppe der Einheitswurzeln von K zyklisch ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.3: Wir betrachten noch einmal die Gleichung $a^2 - 47b^2 = \pm 19$ aus Aufgabe 6.3. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Lösungen dieser Gleichung geben muss. Was können Sie über das Vorzeichen der 19 aussagen?

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4: Sei $d > 0$ eine quadratfreie natürliche Zahl. Die Gleichung

$$x^2 - dy^2 = 1$$

wird Pellsche Gleichung genannt.

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung unendlich viele Lösungen in den ganzen Zahlen hat.

(b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeigen Sie, dass man aus den ganzzahligen Lösungen der Gleichungen $x^2 - dy^2 = \pm 4$ alle Einheiten von $\mathcal{O}_K$ erhält. Begründen Sie insbesondere, warum die ganzzahligen Lösungen von $x^2 - dy^2 = \pm 1$ im allgemeinen nicht alle Einheiten liefern.

(c) Erklären Sie in zwei Sätzen den Zusammenhang zwischen der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ und den Lösungen der Pellschen Gleichung. Geben Sie eine Literaturreferenz für diesen Zusammenhang an.

(8 Punkte)