Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie"
SS 2008 Blatt 9

Ausgabe: 27.06.2008, **Abgabe:** 04.07.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Zeigen Sie, dass jeder Zahlkörper $K/\mathbb{Q}$ vom Grad $2k+1$ nur die Einheitswurzeln -1 und 1 besitzt.

(2 Punkte)

Aufgabe 9.2: Für eine ungerade Primzahl p betrachten wir den Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_p)/K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2 ist, indem Sie das Minimalpolynom von ζ_p über K angeben.

(b) Zeigen Sie, dass alle Einbettungen $\sigma : K \to \mathbb{C}$ reell sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3:

(a) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_q$ eine primitive p-te Einheitswurzel existiert genau dann, wenn $q \equiv 1 \mod p$.

(b) Sei (q) ein Primideal von $\mathbb{Z}$, n eine natürliche Zahl mit $q \nmid n$. Die Primidealfaktorisierung von (q) in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}$ sei

$$(q) = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_i^{e_i}.$$

Benutzen Sie Teil (a), um g, e_i und f_i in Abhängigkeit von q zu bestimmen.

(c) Wie viele Primfaktoren hat (71) in $\mathbb{Q}(\zeta_{20})$? Für welche n ist (59) zerlegt in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$?

(8 Punkte)

Aufgabe 9.4: Zeigen Sie, dass der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(i, \sqrt{-5})$ ein Hauptidealring ist.

(6 Punkte)