Übungen zur Vorlesung “Kommutative Algebra und algebraische Geometrie” SS 2010 Blatt 4

Ausgabe: 13.05.2010, **Abgabe:** 20.05.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss10/kommalg.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ eines Primideals $\mathfrak{p} \subseteq B$ ein Primideal von A ist. Zeigen Sie an einem Beispiel, daß das Urbild eines maximalen Ideals nicht notwendigerweise wieder ein maximales Ideal ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei R ein noetherscher Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 0$.

(i) Zeigen Sie, daß die Menge aller nilpotenten Elemente von R ein Ideal ist. Dieses Ideal heißt *Nilradikal*.

(ii) Zeigen Sie, daß das Nilradikal von R in allen Primidealen von R enthalten ist.

(iii) Zeigen Sie, daß das Nilradikal von R genau der Schnitt aller Primideale von R ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für gegebene $a, b, c \in k$ betrachten wir im $\mathbb{A}^3$ den Schnitt des durch $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ gegebenen Kegels mit der durch $aX + bY + cZ = 0$ gegebenen Ebene. Dies ist eine durch zwei Gleichungen definierte affine Menge. Bestimmen Sie, für welche Werte von $a, b, c \in k$ diese affine Menge irreduzibel ist.

(6 Punkte)