

Arithmetische Geometrie II

Wintersemester 2010/11

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 1. August 2011

**Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!**

Math. Institut
Eckerstr.1
79104 Freiburg

0761-203-5560
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Kapitel 0

Wiederholung

Sei k ein Körper, nicht notwendig algebraisch abgeschlossen.

Eine *Varietät* ist ein reduziertes, separiertes Schema von endlichem Typ über einem Körper.

In der Sprache des letzten Semester: Eine Prävarietät V ist ein lokal geringter Raum, der eine endliche Überdeckung durch Maximalspektren von reduzierten k -Algebren hat. Er ist eine Varietät, wenn er zusätzlich separiert ist.

Für eine weitere Varietät V sind die *S -wertigen Punkte* von V sind die Menge von Morphismen

$$V(S) = \text{Mor}(S, V)$$

Beispiel. Sei $V = \text{Spm } k[X, Y]/\langle Y^2 - X(X-1)(X+1) \rangle$. Für eine endliche Körpererweiterung K/k ist dann

$$V(K) = \{(x, y) \in K^2 \mid y^2 = x(x-1)(x+1)\},$$

denn zu einem solchen Paar gehört ein Morphismus $k[X, Y] \rightarrow K$ mit $X \mapsto x, Y \mapsto y$, der dann über den Quotienten faktorisiert.

Zeta-Funktionen

Für eine Primzahlpotenz $q = p^n$ sei \mathbb{F}_q der Körper mit q Elementen.

Definition 0.1. Sei V eine Varietät über \mathbb{F}_q . Sei $N_\nu = |V(\mathbb{F}_{q^\nu})|$.

$$Z(V, t) = \exp \left(\sum_{\nu \geq 1} N_\nu \frac{t^\nu}{\nu} \right)$$

A priori ist dies eine formale Potenzreihe in $\mathbb{Q}[[t]]$ (tatsächlich in $\mathbb{Z}[[t]]$). Hauptziel der Vorlesung ist zu zeigen, dass $Z(V, t)$ eine *rationale Funktion* ist, d.h. Quotient von Polynomen mit rationalen Koeffizienten.

Beispiel. $V = \mathbb{P}^1$. Dann gilt $|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)| = q + 1$, also $N_\nu = q^\nu + 1$.

$$\begin{aligned} Z(\mathbb{P}^1, t) &= \exp\left(\sum_{\nu \geq 1} (1 + q^\nu) \frac{t^\nu}{\nu}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{\nu \geq 1} \frac{t^\nu}{\nu}\right) \exp\left(\sum_{\nu \geq 1} \frac{q^\nu t^\nu}{\nu}\right) \\ &= \exp(-\log(1 - t)) \exp(-\log(1 - qt)) \\ &= \frac{1}{(1 - t)(1 - qt)} \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 0.1. (i) Berechnung der Zeta-Funktion für $V = \text{Spm } \mathbb{F}_q(\sqrt{2})$.

(ii) Sei $U \subset V$ offen mit abgeschlossenem Komplement Z . Dann gilt

$$Z(U, t)Z(Z, t) = Z(X, t)$$

Genauer gehen wir folgt vor.

Sei l eine Primzahl ungleich p . Sei \mathbb{Q}_l der Körper der l -adischen Zahlen, also die Kompletierung von \mathbb{Q} bezüglich des l -adischen Betrags. Wir werden endlich-dimensionale Vektorräume

$$H^i(\bar{V}, \mathbb{Q}_l)$$

definieren, auf denen der q -Frobenius Φ operiert. Dies ist die *l-adische Kohomologie*. Sie wird definiert mittels *etaler Kohomologie* mit Torsionskoeffizienten.

Definition 0.2.

$$P_i(V, t) = \det(1 - \Phi t | H^i(\bar{V}, \mathbb{Q}_l))$$

Die Nullstellen von $P_i(V, t)$ sind die inversen der Eigenwerte von Φ .

Theorem 0.3 (Grothendieck).

$$Z(V, t) = \prod_{i \geq 0} P_i(V, t)^{(-1)^{i+1}}$$

Hauptzutat im Beweis ist eine Fixpunktformel für etale Kohomologie. Wir benötigen dafür:

- Etale Kohomologie
- Endlichkeitsaussagen
- Eigentlich Basiswechsel
- Glatter Basiswechsel
- Kohomologie mit kompaktem Träger
- Reinheit

- l -adische Garben
- Poincare Dualität
- Fixpunkt-Formel

(Das wäre dann die Inhaltsangabe der Vorlesung.)

Wir wiederholen zunächst die Definition von etaler Kohomologie.

Etale Kohomologie

Definition 0.4. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Eine Topologie T auf \mathcal{C} besteht aus einer Menge $\text{Cov}(T)$ von Überdeckungen, das sind Familien $\{\phi_i : U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ von Morphismen in \mathcal{C} , so dass gilt

- (i) Ist $\{U_i \rightarrow U\}$ eine Überdeckung und $V \rightarrow U$ ein Morphismus, so existieren die Faserprodukte $U_i \times_U V$ und $\{U_i \times_U V \rightarrow V\}$ ist eine Überdeckung.
- (ii) Ist $\{U_i \rightarrow U\}$ eine Überdeckung und für jedes i die Familie $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}$ eine Überdeckung, so ist auch $\{V_{ij} \rightarrow U\}$ eine Überdeckung.
- (iii) Ist $\phi : U' \rightarrow U$ ein Isomorphismus, so ist $\{U' \rightarrow U\}$ eine Überdeckung.

Eine Kategorie mit Topologie heißt auch Situs.

Sei (\mathcal{C}, T) ein Situs. Eine Prägarbe (von abelschen Gruppen) auf \mathcal{C} ist ein kontravarianter Funktor

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \text{ab.}$$

Morphismen von Prägarben sind die Transformationen von Funktoren.

Eine Garbe (von abelschen Gruppen) auf \mathcal{C} ist eine Prägarbe, so dass für alle Überdeckungen $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ die Sequenz

$$0 \rightarrow F(U) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightarrow \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

exakt ist. Morphismen von Garben sind die Morphismen der zugrundeliegenden Prägarben. Die Kategorie der Garben auf \mathcal{C} wird mit $\text{Sh}(\mathcal{C}, T)$ bezeichnet.

Beispiel. X topologischer Raum, \underline{X} die zugehörige Kategorie mit Objekten die offenen Teilmenge von X und Morphismen die Inklusionen. Eine Familie $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ heißt Überdeckung, wenn $\bigcup_{i \in I} U_i = U$. Garben sind dann gewöhnliche Garben, denn

$$U_i \times_U U_j = U_i \cap U_j$$

Ist X eine Varietät, so nennen wir dies die Zariski-Topologie und sprechen vom Zariski-Situs.

Definition 0.5. Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Varietäten heißt etale, wenn er flach und unverzweigt ist, d.h.

- (i) Für jedes $x \in X$ ist der Algebrenhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ flach.

(ii) Die Garbe der relativen Differentialformen $\Omega_{X/Y}$ verschwindet.

Wir benötigen vor allem zwei Eigenschaften von etalen Morphismen:

Satz 0.6. (i) Die Komposition etaler Morphismen ist etale.

(ii) Der Basiswechsel eines etalen Morphismus ist etale.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus den Rechenregeln für flach und für Differentialformenmoduln. Die zweite Aussage folgt ebenfalls ohne zuviel Mühe aus diesen Rechenregeln - wenn man mit Schemata arbeitet. Wir müssen zusätzlich folgende Aussage zeigen: Sei $A \rightarrow B$ etaler Morphismus von k -Algebren. Ist A reduziert, dann auch B . Auch dies folgt aus kommutativer Algebra, vergleiche z.B. das Buch von Matsumura. \square

Übungsaufgabe 0.2. Sei k perfekt, A und B reduzierte, endlich erzeugte k -Algebren. Dann ist $A \otimes B$ reduziert. (Referenz: Matsumura, Commutative ring theory.) Geben Sie ein Gegenbeispiel, wenn k nicht perfekt ist.

Definition 0.7. Sei X eine Varietät. Der etale Situs X_{et} besteht aus der Kategorie der etalen Morphismen $X' \rightarrow X$ und den Überdeckungen die Familien $\{\phi_i : U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$, so dass

$$\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = U$$

Dass es sich um einen Situs handelt, folgt aus dem vorherigen Satz.

Beispiel. Sei k ein Körper. Die Objekte des etalen Situs k_{et} bestehen aus endlichen disjunkten Vereinigungen

$$X' = \bigcup_{i=1}^n \text{Spm } \kappa_i$$

wobei κ_i/k eine endliche separable Körpererweiterung ist. Eine etale Garbe ist durch ihre Werte auf endlichen separablen Körpererweiterungen eindeutig bestimmt. Die Restriktionsabbildungen sind injektiv. Sei \bar{k} der separable Abschluss von k . Wir setzen

$$\mathcal{F}(\bar{k}) = \bigcup \mathcal{F}(\kappa)$$

wobei die Vereinigung über alle endlichen Teilkörper von \bar{k} geht. Hierauf operiert $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ und es gilt

$$\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(\bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/K)}$$

Satz 0.8 (WS, Satz 8.12, Satz 8.13). Die Kategorien der etalen Prägarben und Garben ist abelsch. Der Inklusionsfunktork von der Kategorie der Garben in die Kategorie der Prägarben ist linksexakt und hat einen exakten linksadjungierten, die Garbifizierung.

Konkret: Zu jeder Prägarbe \mathcal{F} gehört eine Garbifizierung $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, so dass jeder Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ in eine Garbe \mathcal{G} eindeutig über \mathcal{F}^+ faktorisiert.

Definition 0.9. Seien (\mathcal{C}, T) und (\mathcal{C}', T') Siten. Ein Morphismus von Siten ist ein Funktor $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, so dass gilt:

- (i) Ist $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ eine Überdeckung in T , so ist $\{a(U_i) \rightarrow a(U)\}_{i \in I}$ eine Überdeckung in T' .
- (ii) Ist $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ eine Überdeckung in T und $V \rightarrow U$ ein Morphismus in \mathcal{C} , so ist

$$a(U_i \times_U V) \rightarrow a(U_i) \times_{a(U)} a(V)$$

ein Isomorphismus.

Beispiel. (i) Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $a = f^{-1} : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ ein Morphismus von Siten. Man beachte, dass er in die Gegenrichtung geht!

(ii) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Varietäten. Dann ist der Basiswechsel ein Morphismus von Siten $Y_{\text{et}} \rightarrow X_{\text{et}}$.

(iii) Sei X eine Varietät, $X_{\text{Zar}} = \underline{X}$. Dann ist die Inklusion $X_{\text{Zar}} \rightarrow X_{\text{et}}$ ein Morphismus von Siten.

Satz 0.10 (WS Satz 8.15). (i) Sei $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ein Funktor. Dann gibt es adjungierte Funktoren

$$a_* : \text{PSh}(\mathcal{C}') \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}) \quad a^* : \text{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}')$$

d.h.

$$\text{Hom}(a_* \mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}(\mathcal{F}, a^* \mathcal{G})$$

für alle $\mathcal{F} \in \text{PSh}(\mathcal{C}')$, $\mathcal{G} \in \text{PSh}(\mathcal{C})$.

(ii) Sei $a : (\mathcal{C}, T) \rightarrow (\mathcal{C}', T')$ ein Morphismus von Siten. Dann gibt es adjungierte Funktoren

$$a^* : \text{Sh}(\mathcal{C}') \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}) \quad a_* : \text{Sh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}')$$

Satz 0.11. Sei V eine Varietät. Dann hat die Kategorie der etalen Garben auf V genügend viele Injektive, d.h. für jede Garbe \mathcal{F} gibt es einen Monomorphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ in eine injektive Garbe \mathcal{I} .

Übungsaufgabe 0.3. Beweis des Satzes mit Abstract Nonsense.

Referenz: Grothendieck, Alexander Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. (2) 9 1957 119–221.

Definition 0.12. Sei V eine Varietät, \mathcal{F} eine etale Garbe auf V . Die i -te etale Kohomologie ist die i -te Rechtsableitung

$$H_{\text{et}}^i(V, \mathcal{F}) = R^i \Gamma(V, \mathcal{F})$$

des globalen Schnittfunktors $\Gamma : \text{Sh}(V_{\text{et}}) \rightarrow \text{ab}$.

Konkreter: Sei $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^*$ eine injektive Auflösung, d.h. \mathcal{I}^* ist ein Komplex von injektiven Garben mit $H^j(\mathcal{I}^*) = 0$ für $j \neq 0$ und $H^0(\mathcal{I}^*) = \mathcal{F}$. Dann ist

$$H^i(V, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(V, \mathcal{I}^*))$$

Kapitel 1

Endlichkeitsbedingungen

Alle Varietäten über festen Körper k , alle Garbe im etalen Situs.

Definition 1.1. Sei X eine Varietät. Eine Garbe \mathcal{F} heißt konstant, wenn sie die Garbifizierung einer konstanten Garbe $U \mapsto U$ ist. Sie heißt lokal konstant, wenn es eine etale Überdeckung $\{U_i \rightarrow X\}$ gibt, so dass $\mathcal{F}|_{U_i}$ konstant ist. Sie heißt endlich lokal konstant, wenn sie lokal-konstant ist und alle $\mathcal{F}(U)$ endlich. Eine Garbe \mathcal{F} heißt konstruierbar, wenn X endliche Vereinigung von lokal-abgeschlossenen Untervarietäten Y mit $\mathcal{F}|_Y$ endlich lokal-konstant.

Beispiel. Sei X eine Varietät, n teilerfremd zu $\text{Char}(k)$. Für $U \rightarrow X$ etale sei $\mu_n(U)$ die Gruppe der n -ten Einheitswurzeln in $\mathcal{O}(U)$. Diese Garbe ist endlich lokal-konstant: Für jedes $U = \text{Spm } A$ sei $U' = \text{Spm } A[X]/(X^n - 1) \rightarrow U$ etale, da $nX^{n-1} \neq 0$ (Jacobi-Kriterium). Es gilt $\mu_n(U') \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bzw. $\mu_n|_{U'} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Man beachte, dass die Aussage in der Zariski-Topologie falsch ist!

Lemma 1.2. Eine Garbe \mathcal{F} auf X ist genau dann konstruierbar, wenn es jede abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ eine offene nichtleere Teilmenge $U \subset Y$ enthält mit $\mathcal{F}|_U$ endlich lokalkonstant.

Beweis: Sei X konstruierbar, konstant auf Y_1, \dots, Y_n . Sei $Y \subset X$ abgeschlossen. Ohne Einschränkung ist Y irreduzibel. Die $Y \cap Y_i$ überdecken Y . Daher gibt es ein i , so dass $Y \cap Y_i$ eine offene Teilmenge $U_i \subset Y$ enthält. Hierauf ist \mathcal{F} endlich lokal konstant.

Für die Umkehrung beginnen wir mit einer offenen Teilmenge $U = Y_1 \subset X$ auf der \mathcal{F} endlich lokal konstant ist. Dann ist $X \setminus U$ offen und enthält nach Voraussetzung eine offene Teilmenge Y_2 , auf der \mathcal{F} endlich lokal-konstant ist. Dieses Verfahren wird iteriert. Es bricht ab, da X noethersch ist als topologischer Raum. \square

Beispiel. Sei $j : U \rightarrow X$ eine offene Immersion, \mathcal{F} eine Garbe auf X . Dann ist $j_*\mathcal{F}$ die Garbifizierung von

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & V \rightarrow U \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(Ausdehnung durch 0). Ist \mathcal{F} endlich lokalkonstant, so ist $j_!\mathcal{F}$ konstruierbar, denn $j_!\mathcal{F}|_U = \mathcal{F}$, $j_!\mathcal{F}|_{X \setminus U} = 0$.

Es ist ab jetzt sinnvoll, mit Schemata statt mit Varietäten zu arbeiten. Der Unterschied liegt im zugrundeliegenden Menge. Sei V eine Varietät. Das zugehörige Schema \tilde{V} hat als Punkte die Menge der irreduziblen Teilmengen von V . Diese wird mit der Zariski-Topologie versehen: die abgeschlossenen stehen in Bijektion zu den abgeschlossenen Teilmengen von V : nämlich $A \mapsto \tilde{A}$ die Menge der irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von A . Der topologische Raum \tilde{V} mit einer Garbe von Ringen versehen, wobei $\mathcal{O}(\tilde{U}) = \mathcal{O}(U)$, wenn \tilde{U} die Schematisierung von U .

Lokal ist \tilde{V} isomorph zu $\text{Spec } R$, wobei R eine reduzierte k -Algebra von endlichem Typ und $\text{Spec } R$ die Menge der Primideale.

Umgekehrt kann V aus \tilde{V} rekonstruiert werden, in dem man zur Teilmenge der abgeschlossenen Punkte übergeht.

Übungsaufgabe 1.1. Geben Sie ein Schema an, das nicht von der Form \tilde{V} für eine Varietät V ist.

Wir erinnern an die Definition von Halmen. Ein *geometrischer Punkt* ist ein Morphismus $\bar{x} : \text{Spm } \kappa \rightarrow X$, wobei ein κ separabel abgeschlossener Körper. Er liegt über einem Punkt $x \in X$ mit Restklassenkörper $\kappa(x)$. Der *Halm* einer Garbe \mathcal{F} in \bar{x} ist

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} = \lim_U \mathcal{F}(U)$$

wobei das direkte System alle etalen Umgebungen $U \rightarrow X$ durchläuft, über die \bar{x} faktorisiert.

Übungsaufgabe 1.2. Eine lokal-konstante Garbe auf einer Varietät ist endlich lokal-konstant genau dann, wenn alle Halme endlich sind oder äquivalent, wenn es für jede Zusammenhangskomponente einen geometrischen Punkt, in dem der Halm endlich ist.

Lemma 1.3. Sei $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$ für $i \in I$ eine Familie von Morphismen in eine konstruierbare Garbe \mathcal{F} . Für jeden geometrischen Punkt \bar{x} sei $\bigcup (\mathcal{F}_i)_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}}$ surjektiv. Dann gibt es eine endliche Teilfamilie $\mathcal{F}_{i_1}, \dots, \mathcal{F}_{i_r}$, so dass

$$\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{F}_{i_j} \rightarrow \mathcal{F}$$

surjektiv ist.

Beweis: Mit noetherscher Induktion genügt es, eine etale Umgebung $\phi : U \rightarrow X$ zu finden, so dass die Aussage für das System $\mathcal{F}_i|_U$ gilt (und dann auch auf für $\phi(U) \subset X$. Wir wählen $U \rightarrow X$ so, dass $\mathcal{F}|_U$ konstant ist und U irreduzibel. Seien s_1, \dots, s_r die endlich vielen Schnitte von $\mathcal{F}(U)$. Sei i_j ein Index, so dass der Halm von s_j ein Urbild in $(\mathcal{F}_{i_j})_{\bar{x}}$ hat. Nach eventuellem Verkleinern von U hat s_j dann ein Urbild in $\mathcal{F}_{i_j}(U)$. \square

Satz 1.4. Sei $\phi : Y \rightarrow X$ ein Morphismus. Dann definiert

$$U \mapsto \text{Mor}_X(U, Y) = \tilde{Y}$$

eine étale Garbe von Mengen auf X .

Wir sagen, \tilde{Y} wird durch Y repräsentiert. Der Beweis ist eine Übung in Descent-Theorie.

Beweis: Wir überprüfen das Garbenaxiom, also für eine étale Überdeckung $\{U_i \rightarrow U\}$ die Exaktheit von

$$\text{Mor}_X(U, Y) \rightarrow \prod_i \text{Mor}_X(U_i, Y) \rightrightarrows \prod_{(i,j)} \text{Mor}_X(U_i \times_U U_j, Y)$$

Man beachte

$$\text{Mor}_X(U, Y) = \text{Mor}_U(U, Y \times_X U)$$

Wir ersetzen Y durch $Y \times_X U$, d.h. ohne Einschränkung ist $X = U$. Da Morphismen von Varietäten entlang offener Mengen zusammengeklebt werden können, sind ohne Einschränkung X, Y, U, U_i affin. Sei weiter $U' = \bigcup U_i$. Dann ist $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U')$ treufach. Mit

$$A = \mathcal{O}(U), B = \mathcal{O}(U'), C = \mathcal{O}(Y)$$

wird die Sequenz zu

$$\text{Mor}_A(C, A) \rightarrow \text{Mor}_A(C, B) \rightrightarrows \text{Mor}_A(C, B \otimes_A B)$$

wobei Mor_A Morphismen von A -Algebren sind. Man sieht leicht, dass es genügt, die Exaktheit von

$$\text{Hom}_A(C, A) \rightarrow \text{Hom}_A(C, B) \rightrightarrows \text{Hom}_A(C, B \otimes_A B)$$

zu überprüfen, wobei Hom_A Modulhomomorphismen bezeichnet. Dies folgt durch Anwenden von $\text{Hom}_A(C, \cdot)$ auf die Sequenz

$$A \rightarrow B \xrightarrow{b \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b} B \otimes_A B$$

Behauptung. Diese Sequenz ist exakt, wenn $A \rightarrow B$ treufach ist.

Die Aussage ist trivial, falls $A \rightarrow B$ einen Schnitt hat. Im allgemeinen können wir die Exaktheit nach treufachem Basiswechsel von A nach B überprüfen. Die Abbildung $B \rightarrow B \otimes B$ hat einen Schnitt $s(b \otimes b') = bb'$. \square

Beispiel. Für $Y = \mathbb{A}^1$ erhalten wir étalen Descent der Strukturgarbe, d.h. $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ ist eine étale Garbe.

Übungsaufgabe 1.3. Die Kategorie der étalen kohärenten Garben ist äquivalent zur Kategorie der kohärenten Zariski-Garben.

Wir sind jetzt an dem Fall interessiert, dass $Y \rightarrow X$ etale ist.

Beispiel. Sei $X = \text{Spec } k$, $Y = \text{Spec } K$ mit K/k eine endliche separable Erweiterung. Nach dem Satz vom primitiven Element ist $K = k[X]/P$ für ein separables Polynom P . Sei $U \rightarrow X$ ebenfalls etale, also $U = \bigcup \text{Spec } L_i$ mit L_i/k endliche separable Körpererweiterung.

$$\text{Mor}_X(U, Y) = \bigcup_i \text{Hom}_k(K, L_i) = \bigcup_i \{x \in L_i \mid P(x) = 0\}$$

Sei L die normale Hülle von K . Für $L_i \supset L$ hat dann P genau $\deg P$ viele Nullstellen in L . Die Garbe $\tilde{Y}|_{\text{Spec } L}$ ist konstant.

Sei $Y \rightarrow X$ eine quasi-endliche unverzweigte Überlagerung von komplexen Räumen mit der analytischen Topologie. Lokal für die etale Topologie zerfällt Y dann: Jeder Punkt von X hat eine Umgebung, so dass

$$Y_U = \bigcup U_i$$

mit $U_i \subset U$ offen. Sei $Z \subset U$ abgeschlossen. Dann setzt sich jeder Schnitt $Z \rightarrow Y$ eindeutig zu einem Schnitt $U \rightarrow Y$ fort, eventuell nach Verkleinern von U . Wir wollen diesselbe Aussage auch für etale Morphismen zeigen.

Lemma 1.5. *Sei \bar{x} ein geometrischer Punkt von X mit Bild $x \in X$, $A = \mathcal{O}_{X_{\text{et}}, \bar{x}} = \lim_{(U, \psi)} \mathcal{O}(U)$ der direkte Limes über alle etalen Umgebungen von \bar{x} . Dann ist A strikt henselsch, d.h. A lokal mit separabel abgeschlossenem Restklassenkörper und für jedes etale $\phi : Y \rightarrow X$ und einen Schnitt \bar{y} von $Y_{\bar{x}} \rightarrow \bar{x}$, hat $Y_A \rightarrow \text{Spec } A$ einen eindeutigen Schnitt, der \bar{y} fortsetzt.*

Beweis: (Milne Theorem 4.2 und Ende von §4.) Idee des Arguments: \bar{y} macht Y_A zu einer etalen Umgebung von \bar{x} . Die Strukturabbildung $\mathcal{O}(Y) \rightarrow A$ ist der gesuchte Schnitt. \square

Lemma 1.6. *Sei $i : Z \subset X$ abgeschlossen, $\phi : Y \rightarrow X$ ein Morphismus. Dann gilt*

$$i^* \tilde{Y} = \widetilde{(Y \times_X Z)}$$

Beweis: Wir erinnern uns an die Definition von i^* : Sei \mathcal{F} etale Garbe auf X . Dann ist $i^* \mathcal{F}$ ist die etale Garbe

$$U' \mapsto \lim_{(U, \psi)} \mathcal{F}(U)$$

wobei der Limes alle etalen U und $\psi : U' \rightarrow U \times_X Z$ durchläuft. In unserer speziellen Situation genügt es, $U' = U \times_X Z$ für etales $U \rightarrow X$ anzunehmen. Dann gilt

$$i^* \tilde{Y}(U') = \lim_{(U, \psi)} \tilde{Y}(U) = \lim \text{Mor}_X(U, Y) \rightarrow \text{Mor}_Z(U', Y \times_X Z)$$

(für die letzte Abbildung schränken wir zunächst ein nach U' , dann faktorisiert die Abbildung über Y_Z .) Um zu zeigen, dass es sich um einen Isomorphismus handelt, betrachten wir die Halme in den Punkten von Z . Es gilt

$$i^* \tilde{Y}_{\bar{z}} = \text{Mor}_X(\text{Spec } \mathcal{O}_{X, \bar{u}}, Y) \quad \tilde{Y}_{Z, \bar{z}} = \text{Mor}_X(\text{Spec } \mathcal{O}_{Z, \bar{u}}, Y)$$

Beide sind nach dem letzten Lemma gegeben durch die Schnitte $\bar{u} \rightarrow Y$. \square

Satz 1.7. *Ist $\phi : Y \rightarrow X$ etale, so ist die Garbe \tilde{Y} konstruierbar.*

Beweis: Wir zeigen, dass es ein etales $V \rightarrow X$ gibt, so dass $Y \times V \rightarrow V$ spaltet, d.h.

$$Y \times V = \coprod V$$

Dann ist $\tilde{Y}|_V = \coprod \tilde{V}$ und \tilde{V} ist eine konstante Garbe nämlich konstant gleich id . Auf dem Komplement Z des Bildes von V ist \tilde{Y} durch nach dem Lemma das etale Z -Schema Y_Z repräsentiert. Der Rest des Argumentes geht mit noetherscher Induktion.

Ohne Einschränkung ist X irreduzibel. Sei $k(X)$ der Funktionenkörper. Da $Y \rightarrow X$ etale ist, ist $Y_{k(X)}$ disjunkte Vereinigung von Spektren von endlichen separablen Körpererweiterungen $K_1, \dots, K_n/k(X)$. Sei $K/k(X)$ eine endliche Galoiserweiterung aller K_i . Dann zerfällt Y_K als disjunkte Vereinigung von Kopien von $\text{Spec } K$. Wir wählen $U \rightarrow X$ etale mit $k(U) = K$. (Das geht: $K/k(X)$ entsteht durch Adjunktion eines Elementes mit separablem Minimalpolynom P . Die Adjunktion eines Elementes mit dieser Gleichung zu X ist generisch etale, dort wo $P' \neq 0$). Die Schnitte $\text{Spec } K \rightarrow Y_K$ dehnen sich auf offene Teilmengen von U aus. Über dieser zerfällt dann auch Y_U . \square

Sei \mathcal{F} eine etale Garbe, $s \in \mathcal{F}(U)$ ein Schnitt. Dann definiert dies einen Morphismus $s_* : \tilde{U} \rightarrow \mathcal{F}$ via

$$\tilde{U}(V) = \text{Mor}(V, U) \mapsto \mathcal{F}(V) \quad \phi \mapsto \phi^*(s)$$

Das Element s liegt in seinem Bild.

Satz 1.8. *Eine etale Garbe von Mengen \mathcal{F} auf X ist genau dann darstellbar, wenn gilt:*

- (i) *Alle Halme sind endliche Mengen.*
- (ii) *Für jedes etale $U \rightarrow X$ und je zwei Schnitte $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(U)$ ist*

$$\{x \in U \mid \alpha_x \neq \beta_x\}$$

offen.

Beweis: Wegen etalem Descent genügt es für jeden Punkt eine etale Umgebung zu finden, auf der \mathcal{F} darstellbar ist.

Die komplementäre Menge

$$\{x \in U \mid \alpha_x = \beta_x\}$$

ist offen (Garbenaxiom). Daher ist sie sogar offen und abgeschlossen, also eine Zusammenhangskomponente von U . Sei also U zusammenhängend, dann ist

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$$

injektiv. Daher sind alle $\mathcal{F}(U)$ endliche Mengen. Für festes zusammenhängendes U sei $Y = \bigcup_{s \in \mathcal{F}(U)} U$. Das Tupel der Element von $\mathcal{F}(U)$ definiert einen Morphismus

$$\tilde{Y} \rightarrow \mathcal{F}|_U$$

Diese Abbildung ist injektiv, da alle $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ injektiv sind. Sei $x \in U$ ein Punkt. Dann gibt es eine etale Umgebung U' von x , so dass alle Element von \mathcal{F}_x in $\mathcal{F}(U')$ existieren. Daher ist

$$\tilde{Y}|_{U'} \rightarrow \mathcal{F}|_{U'}$$

bijektiv. Angewendet auf einen generischen Punkt η von X sehen wir also, dass \mathcal{F} in einer etalen Umgebung von η darstellbar ist. Für den Rest des Argumentes mit noetherscher Induktion siehe [FK] 3.21-3.23. \square

Korollar 1.9. *Sei \mathcal{F} darstellbar und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Untergarbe. Dann ist \mathcal{G} darstellbar.*

Beweis: Die Bedingung für \mathcal{G} folgt aus der für \mathcal{F} . \square

Satz 1.10. *Für eine Garbe von Mengen \mathcal{F} auf X_{et} sind äquivalent:*

- (i) \mathcal{F} ist konstruierbar.
- (ii) Es gibt eine Garbe \mathcal{G} , die durch ein etales $Y \rightarrow X$ repräsentiert wird und eine surjektive Abbildung $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$.
- (iii) Es gibt eine Äquivalenzrelation $R \rightrightarrows Y$ in X_{et} , so dass \mathcal{F} der Kokern von $\tilde{R} \rightrightarrows \tilde{Y}$ ist, d.h. $\tilde{R}(U) \subset \tilde{Y}(U) \times \tilde{Y}(U)$ ist eine Äquivalenzrelation und \mathcal{F} ist die Garbifizierung von $U \mapsto \tilde{Y}(U) / \sim_{\tilde{R}(U)}$.

Beweis: Sei \mathcal{F} eine etale Garbe, $s \in \mathcal{F}(U)$. Daher ist die Familie aller $s_* : \tilde{U} \rightarrow \mathcal{F}$ surjektiv. Sei nun \mathcal{F} konstruierbar. Nach Lemma 1.3 gibt es dann eine endliche Teilfamilie, die surjektiv ist.

Sei nun $\mathcal{G} = \tilde{Y}$ darstellbar, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ surjektiv. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{G} \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$ die Garbe

$$V \mapsto \mathcal{G}(V) \times_{\mathcal{F}(V)} \mathcal{F}(V)$$

Sie hat zwei natürliche Projektionen nach \mathcal{G} und \mathcal{F} ist der Kokern von

$$\mathcal{G} \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}$$

Als Untergarbe der darstellbaren Garbe $\mathcal{G} \times \mathcal{G} = \widetilde{Y \times Y}$ ist \mathcal{H} darstellbar. Sei nun $R \rightrightarrows Y$ eine etale Äquivalenzrelation. Hieraus folgt (??), dass $R \rightarrow Y \times Y$ eine offen Immersion ist. Ist die Abbildung zusätzlich abgeschlossen, so ist die

Voraussetzung von Satz 1.8 erfüllt und \mathcal{F} ist darstellbar. Im allgemeinen gibt es eine offene Teilmenge von $U \subset X$, über der Y und R endlich sind. Hier ist $R \rightarrow Y \times Y$ endlich, also abgeschlossen. Über U ist \mathcal{F} also darstellbar und daher konstruierbar. Der Rest geht wieder mit noetherscher Induktion. ([FK] 4.3’’). \square

Bemerkung. Kokerne von etalen Äquivalenzrelationen heißen auch algebraische Räume. Nach dem Satz sind also alle konstruierbaren Garben darstellbar durch algebraische Räume.

Korollar 1.11. *Jede Untergarbe einer konstruierbaren Garbe ist konstruierbar. Jede Garbe von Mengen ist filtrierter direkter Limes von konstruierbaren Untergarben.*

Beweis: Die erste Aussage gilt, da Untergarben von darstellbaren Garben darstellbar sind. Für die zweite Aussage schreiben wir \mathcal{F} wieder als Quotient einer Familie von darstellbaren Garben. Deren Bilder sind dann konstruierbare Untergarben. \square

Übungsaufgabe 1.4. Sei $Y \rightarrow X$ eine Varietät. Verifizieren Sie, dass \tilde{Y} die Bedingung (ii) aus Satz 1.8 erfüllt.

Definition 1.12. *Eine Garbe von abelschen Gruppen heißt Torsionsgarbe, wenn alle Halme Torsionsgruppen sind.*

Übungsaufgabe 1.5. Äquivalent dazu: alle $\mathcal{F}(U)$ sind Torsionsgruppen.

Satz 1.13. *Die konstruierbaren Garben von abelschen Gruppen sind genau die noetherschen Objekte in der Kategorie der Torsionsgarben. Jede Torsionsgarbe ist filtrierter direkter Limes ihrer konstruierbaren Untergarben.*

Definition 1.14. *Sei $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $U \rightarrow X$ etale. Wir setzen \tilde{U}^Λ die Garbifizierung von*

$$V \mapsto \Lambda[\tilde{U}(V)]$$

der freie Λ -Modul mit Basis $\tilde{U}(V)$.

Dies ist eine konstruierbare Garbe von Λ -Moduln.

Beweis: Sei \mathcal{F} konstruierbar,

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots$$

eine Folge von Untergarben. Sei $\mathcal{F}' = \lim \mathcal{F}_i$. Als Untergarbe von \mathcal{F} ist \mathcal{F}' konstruierbar. Nach Lemma 1.3 ist \mathcal{F}' dann Limes einer endlichen Teilfamilie der \mathcal{F}_i . Die Folge wird also stabil.

Sei nun \mathcal{G} eine Torsionsgarbe. Sie ist direkter Limes der $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Moduluntergarben. Ohne Einschränkung ist also \mathcal{G} eine Λ -Modulgarbe mit $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir betrachten die Familie der

$$s_* : \tilde{U} \rightarrow \mathcal{G}$$

für $U \rightarrow X$ etale, $s \in \mathcal{G}(U)$. Alle Schnitte liegen im Bild der Familie, also ist die Familie surjektiv. Da \mathcal{G} eine Garbe von Λ -Moduln ist, setzt sich s_* fort nach

$$\tilde{U}^\Lambda \rightarrow \mathcal{G}$$

Sei jeweils $\mathcal{G}_{U,s}$ das Bild in \mathcal{G} . Als Quotient einer konstruierbaren Garbe ist diese Garbe konstruierbar. Nach Konstruktion ist \mathcal{G} Vereinigung der $\mathcal{G}_{U,s}$. \square

Korollar 1.15. *die Kategorie der konstruierbaren Garben ist eine abelsche Unterkategorie der Kategorie der Torsionsgarben. Die Kategorie der Torsionsgarben ist lokal noethersch, d.h.*

- (i) *Die noetherschen Objekte bilden ein System von Generatoren.*
- (ii) *Filtrierte direkte Limiten sind exakt.*

Beweis: Eine Menge von Objekten einer abelschen Kategorie heißt *System von Generatoren*, wenn jedes Objekt Quotient von direkten Summen dieser Objekte ist. Laut Beweis des Satzes bilden die $\tilde{U}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ ein System von Generatoren. Exaktheit kann auf Halmen überprüft werden, folgt also aus der entsprechenden Eigenschaft für abelsche Gruppen. \square

Korollar 1.16. *Sei $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, \mathcal{F} eine konstruierbare Garbe von Λ -Moduln auf X . Dann gibt es ein etales Schema U . Dann gibt es ein etales Schema U über X und einen surjektiven Garbenhomomorphismus*

$$\tilde{U}^\Lambda \rightarrow \mathcal{F}$$

Beweis: Nach dem Beweis von Satz 1.13 gibt es einen surjektiven Garbenhomomorphismus

$$\bigoplus_{U,s} \tilde{U}^\Lambda \rightarrow \mathcal{F}$$

Da \mathcal{F} konstruierbar ist, reichen endlich viele Summanden \tilde{U}_i^Λ . Wir setzen $U = \coprod U_i$. \square

Limiten

Satz 1.17. *Sei $\mathcal{F} = \lim \mathcal{F}_\nu$ filtrierter direkter Limes von abelschen Garben auf X . Dann gilt*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = \lim H^i(X, \mathcal{F}_\nu)$$

Beweis: Wir betrachten den Fall $i = 0$. Sei $s \in \mathcal{F}(X)$. Für jeden geometrischen Punkt \bar{x} gilt

$$s_{\bar{x}} \in \mathcal{F}_{\bar{x}} = \lim \mathcal{F}_{\nu, \bar{x}}$$

Daher gibt es $\nu(\bar{x})$, so dass $s_{\bar{x}}$ repräsentiert wird durch ein $s_{\nu, \bar{x}} \in \mathcal{F}_{\nu, \bar{x}}$. Dieses wird wiederum repräsentiert durch $s_\nu \in \mathcal{F}(U_\nu)$ für eine etale Umgebung von \bar{x} . Nach eventuellem Verkleinern von U_ν hat s_ν das Bild s in $\mathcal{F}(U_\nu)$. Die Varietät X ist quasi-kompakt, wird also von endlich vielen der U_ν überdeckt. Sei dies

α größer als diese endlich vielen Indices. Dann haben wir eine endliche etale Umgebung U_1, \dots, U_n von X gefunden und $s_i \in \mathcal{F}_\alpha(U_i)$ mit Bild $s|_{U_i}$ in \mathcal{F} . Wir vergleichen s_i und s_j auf $V = U_i \times_X U_j$. Beide haben dasselbe Bild in $\mathcal{F}(U_i \times U_j)$. Wieder hat jeder geometrische Punkt \bar{x} von V eine etale Umgebung V' und einen Index $\beta_{\bar{x}} \geq \alpha$, so dass die beiden Schnitte gleich werden in $\mathcal{F}_\beta(V')$. Wegen der Quasikompaktheit reichen endlich viele der V' um V zu überdecken. Sei β größer gleich der endlich vielen Indices. Dann sind s_i und s_j gleich in \mathcal{F}_β auf der etalen Überdeckung. Nach Garbenaxiom sind sie gleich in $\mathcal{F}_\beta(V)$. Wieder nach Garbenaxiom definieren sie einen Schnitt auf $\mathcal{F}_\beta(X)$, das gesuchte Urbild von \bar{x} .

Die Verallgemeinerung auf beliebiges i folgt durch Standardtechniken der homologischen Algebra. Wir skizzieren nur: Die Kategorie der direkten System hat genügend viele Injektive. $\Gamma(X, \dots)$ bildet sie auf azyklische für \lim ab (da dieser Funktor exakt ist). Also gilt (Grothendieck-Spektralsequenz)

$$R^i(\lim \circ \Gamma(X, \cdot)) = \lim \circ R^i \Gamma(X, \cdot)$$

□

Bemerkung. Die Aussage beruht stark auf Quasikompaktheit der topologischen Räume. Sie wird falsch für nicht-noethersche Schemata oder auch für rigide Varietäten.

Sei $X = \varprojlim X_\alpha$ projektiver Limes eines Systems von Schemata mit affinen Übergangsabbildungen.

Beispiel. Sei Y eine Varietät, \bar{y} ein geometrischer Punkt, $\mathcal{O}_{Y_{\text{et}}, \bar{y}}$ der Halm der Strukturgarbe. Dann ist nach Definition

$$\mathcal{O}_{Y_{\text{et}}, \bar{y}} = \varinjlim_{U, \phi} \mathcal{O}(U)$$

(direkter Limes über alle affinen etalen Umgebungen von \bar{y}) und daher

$$\text{Spec } \mathcal{O}_{Y_{\text{et}}, \bar{y}} = \varinjlim_{U, \phi} \text{Spec } \mathcal{O}(U)$$

Dies ist keine Varietät mehr, wohl aber ein Schema!

Satz 1.18. Sei \mathcal{F}_0 eine konstruierbare Garbe auf X_{α_0} , \mathcal{F} ihr inverses Bild auf X . Dann gilt

$$H^*(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\alpha \geq \alpha_0} H^*(X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$$

Seien $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$ konstruierbare Garben von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Moduln. Dann gilt

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}^*(X; \mathcal{F}, \mathcal{G}) = \varinjlim \text{Ext}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}^*(X_\alpha; \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha)$$

Beweis: Skizze: Die Rechenregeln für direkte Limiten aus Satz 1.17 erlaubt es, sich auf konstruierbare Garben zurückzuziehen. Diese werden durch etale Äquivalenzrelationen von darstellbaren Garben repräsentiert. Letztlich ist nur der Fall von darstellbaren Garben nötig. Der wesentlich Schritt ist dann:

Behauptung. Sei $U \rightarrow X$ etale. Dann gibt es $U_0 \rightarrow X_{\alpha_0}$ mit $U_0 \times_{X_{\alpha_0}} = X$. Je zwei solche U_0 werden isomorph über einem X_{α_1} .

Der Beweis beruht auf der Überlegung, dass $U \rightarrow X$ durch Gleichungen hingeschrieben wird, deren Koeffizienten bereits über einem X_α liegen. Da es nur endlich viele Koeffizienten sind, reicht ein α für alle gleichzeitig. Alle Eigenschaften werden wieder durch Gleichungen nachgerechnet, die wiederum bereits auf endlicher Stufe gelten. \square

Korollar 1.19. Sei \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf Y , $f : Y \rightarrow X$ ein Morphismus, \bar{x} ein geometrischer Punkt von X . Sei \bar{Y} das inverse Bild auf $\bar{Y} = Y \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}$. Dann gilt

$$R^i f_*(\mathcal{F})_{\bar{x}} = H^i(\bar{Y}, \bar{\mathcal{F}})$$

Kapitel 2

Der Kurvenfall

Wir wollen nun unsere ersten etalen Kohomologiegruppen tatsächlich ausrechnen. In diesem Kapitel arbeiten wir mit Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k .

Definition 2.1. Sei X eine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann ist die Picardgruppe $\text{Pic}(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X . Bezüglich des Tensorproduktes ist dies eine Gruppe.

Ein Geradenbündel ist eine lokalfreie kohärente Garbe von Rang 1 (bezüglich der Zariski oder etalen Topologie, dies ist äquivalent.) Alternativ kann man es geometrisch definieren wie in Differentialtopologie: Ein Geradenbündel ist eine Varietät $L \rightarrow X$ zusammen mit einer k -Vektorraumstruktur auf L_x für alle Punkte $x \in X$, dass lokal von der Form $U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow U$ ist.

Ist X glatt, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$$

wobei $\text{Cl}(X)$ die Divisorenklassengruppe von X ist, d.h. die abelsche Gruppe erzeugt von irreduziblen Untervarietäten der Kodimension 1 modulo Hauptdivisoren $\div(f)$ für $f \in k(x)$. Zu den Details dieses Isomorphismus Hartshorne II §6.

Übungsaufgabe 2.1. Es gilt $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$ bezüglich der Zariski-Topologie und bezüglich der etalen Topologie.

Ist A eine abelsche Gruppe, so bezeichnet $A[n]$ den Kern der Multiplikation mit n .

Satz 2.2. Sei X eine vollständige zusammenhängende glatte Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Sei $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu $\text{Char}(k)$. Dann gilt

$$(i) \quad H^0(X, \mu_n) = \mu_n(k)$$

$$(ii) H^1(X, \mu_n) = \text{Pic}(X)[n]$$

$$(iii) H^2(X, \mu_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$(iv) H^q(X, \mu_n) = 0 \text{ für } q > 2$$

Nach Wahl einer n -ten Einheitswurzel wird hieraus eine Aussage über $H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Bemerkung. Für X wie im Satz vom Geschlecht g gilt

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \times \text{Pic}^0(X)$$

wobei $\text{Pic}^0(X)$ die Geradenbündel vom Grad 0 enthält. Dies ist eine abelsche Varietät der Dimension g . Aus der Theorie der abelschen Varietäten folgt

$$\text{Pic}(X)[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

Zur Vorbereitung:

Lemma 2.3. *Sei X eine glatte Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann gilt*

$$H^i(X, \mathcal{O}^*) = 0 \quad \text{für } i \geq 2$$

Beweis: Sei X zusammenhängend, also irreduzibel. Sei \mathcal{R}_X^* die Garbe der rationalen Funktionen auf X , d.h. für zusammenhängendes U ist $\mathcal{R}_X^*(U) = k(U)$. Sei \mathcal{D}_X die Garbe der Divisoren auf U , d.h. $\mathcal{D}_X(U)$ ist die freie abelsche Gruppe, die von den Punkten von U erzeugt wird.

Da X glatt ist, lässt sich jeder Divisor auf U lokal als Hauptdivisor schreiben. Die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{R}_X \rightarrow \mathcal{D}_X \rightarrow 0$$

ist exakt. Mittels langer exakter Kohomologiesequenz genügt es zu zeigen, dass

$$H^i(X, \mathcal{R}_X), H^i(X, \mathcal{D}_X) = 0 \quad i > 0$$

Sei K der Funktionenkörper von X , $j : \text{Spec } K \rightarrow X$ die natürliche Einbettung. Dann gilt

$$\mathcal{R}_X^* = j_* \mathcal{O}_{\text{Spec } K}^*$$

Wir berechnen $R^i j_* \mathcal{O}^*$. Dies ist die Garbifizierung von

$$U \mapsto H^i(\text{Spec } K \times_X U, \mathcal{O}^*)$$

Dann ist $\text{Spec } K \times_X U$ eine separable Erweiterung von $\text{Spec } K$, besteht also aus endlich vielen separablen Körpererweiterungen von K . Etale Kohomologie wird zu Galoiskohomologie. Aus Hilbert 90 ($j = 1$) Tsens Theorem für Funktionenkörper von Kurven ($j \geq 1$) folgt (Serre, Cohomologie Galoisienne II §3, Beispiel 3.3) dass diese Kohomologiegruppen verschwinden. Aus der Leray Spektralsequenz

$$H^q(X, R^p j_* \mathcal{O}^*) \rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } K, \mathcal{O}^*)$$

wird der Isomorphismus

$$H^q(X, j_* \mathcal{O}^*) \cong H^q(\text{Spec } K, \mathcal{O}^*)$$

Wieder mit Tsens Theorem für Funktionenkörper folgt das Verschwinden dieser Gruppen für $q > 0$.

Nun betrachten wir \mathcal{D}_X . Da k algebraisch abgeschlossen ist, können wir die Punkte als geometrische Punkte auffassen und

$$\mathcal{D}_X = \bigoplus_x x_* \mathbb{Z}_{\text{Spec } k}$$

Kohomologie ist verträglich mit direkten Summen, daher genügt es einen einzigen Summanden zu betrachten. x_* ist exakt. Die Leray Spektralsequenz wird zu daher zu

$$H^q(X, x_* \mathbb{Z}) \cong H^q(\text{Spec } k, \mathbb{Z})$$

Da k algebraisch abgeschlossen ist, verschwindet diese Kohomologie für $q > 0$. \square

Übungsaufgabe 2.2. \mathcal{R}_X^* und \mathcal{D}_X sind etale Garben.

Übungsaufgabe 2.3. Lesen Sie den Beweis von Hilbert 90 nach: Sei K beliebiger Körper, L/K galois. Dann gilt

$$H^1(L/K, L^*) = 0$$

Folgern sie hieraus

$$H^1(\text{Spec } K_{\text{et}}, \mathcal{O}^*) = 0$$

Beweis von Satz 2.2: Wir betrachten die Kummersequenz

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

Die zugehörige lange exakte Sequenz lautet

$$0 \rightarrow \mu_n(n) \rightarrow \mathcal{O}(X)^* \rightarrow \mathcal{O}(X)^* \rightarrow H^1(X, \mu_n) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mu_n) \rightarrow 0$$

Da X vollständig ist, gilt $\mathcal{O}(X) = k$. Die n -Potenzierung $k^* \rightarrow k^*$ ist surjektiv, da k algebraisch abgeschlossen. Weiter gilt $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X)$. Zu zeigen bleibt, dass

$$\text{Coker}(\text{Pic}(X) \xrightarrow{[n]} \text{Pic}(X)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Es ist $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \times \text{Pic}^0(X)$. Auf der abelschen Varietät $\text{Pic}^0(X)$ ist die Multiplikation mit n surjektiv. Auf dem \mathbb{Z} -Faktor erhalten wir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. \square

Korollar 2.4. Sei X glatte Kurve über eine algebraisch abgeschlossenen Körper, $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu $\text{Char}(k)$. Dann sind die Gruppen

$$H^q(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

endlich für alle q und verschwinden für $q > 2$. Wenn X affin ist, verschwinden sie für $q > 1$.

Beweis: Es genügt, zusammenhängende Kurven zu betrachten. Für vollständige Kurven folgt die Aussage aus $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und der Formel für $\text{Pic}(X)[n]$. Im affinen Fall gehen wir den Beweis von Satz 2.2 durch und müssen zeigen:

Behauptung. $[n] : \mathcal{O}_X(X)^* \rightarrow \mathcal{O}_X(X)^*$ hat endlichen Kokern, und $[n] : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ ist surjektiv mit endlichem Kern.

Sei \bar{X} eine glatte Kompaktifizierung von X , $S = \bar{X} \setminus X$. Dann besteht $\mathcal{O}(X)^*$ aus den Elementen von $k(\bar{X})$, deren Divisor Träger in S hat. Die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\bar{X}) \rightarrow \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\dot{=}} \mathbb{Z}^S$$

ist exakt, also

$$0 \rightarrow k \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow F \rightarrow 0$$

mit F frei von endlichem Rang. Die Abbildung $[n]$ ist wie oben surjektiv auf k und hat endlichen Kokern auf F .

Jeder Divisor auf X kann zu einem Divisor vom Grad 0 auf \bar{X} fortgesetzt werden. Auf $\text{Pic}^0(\bar{X})$ ist $[n]$ surjektiv, also auch auf $\text{Pic}(X)$. Um den Kern zu kontrollieren, betrachten wir

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^S \rightarrow \text{Div}(\bar{X}) \rightarrow \text{Div}(X) \rightarrow 0$$

Dies induziert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E \rightarrow \text{Pic}(\bar{X}) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0$$

mit endlich erzeugtem E . Mit dem Schlangenlemma folgt, dass $[n] : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ endlichen Kern hat. \square

Übungsaufgabe 2.4. Zeigen Sie das Analogon von Satz 2.2 für kompakte Riemannsche Flächen.

Bemerkung. Die Randabbildung der Kummersequenz definiert uns (für beliebige Varietäten, auch über nicht algebraisch abgeschlossenem k)

$$c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mu_n)$$

die erste etale Chernklasse.

Dies lässt sich auf konstruierbare Garben verallgemeinern. Hierzu eine Vorbemerkung. Ist \mathcal{F} eine Garbe auf einer Kurve X , deren Halme ausserhalb einer abgeschlossenen Menge S verschwinden, so gilt

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{s \in S} s_* s^* \mathcal{F}$$

und

$$H^i(X, s_* s^* \mathcal{F}) = H^i(\text{Spec } k, s^* \mathcal{F})$$

verschwindet für $i > 0$. Weiter ist $H^0(X, s^* s_* \mathcal{F})$ endlich.

Lemma 2.5. *Sei X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ ein Morphismus von konstruierbaren Garben, der außerhalb einer abgeschlossenen Menge S ein Isomorphismus ist. Dann sind alle $H^i(X, \mathcal{F})$ endlich, genau dann wenn alle $H^i(X, \mathcal{F}')$ endlich sind.*

Beweis: Sei \mathcal{G} das Bild. Wir betrachten

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

Die Garbe \mathcal{K} hat Träger in S . Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert daher

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow 0 \\ H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{G}) \quad i > 0 \end{aligned}$$

Die Endlichkeit aller $H^i(X, \mathcal{F})$ ist äquivalent zur Endlichkeit aller $H^i(X, \mathcal{G})$. Im zweiten Schritte betrachten wir

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

Die Garbe \mathcal{C} hat Träger in S . Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^0(X, \mathcal{C}) \rightarrow \\ H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und

$$H^i(X, \mathcal{G}) \cong H^i(X, \mathcal{F}') \quad i > 1$$

Die Endlichkeit aller $H^i(X, \mathcal{G})$ ist äquivalent zur Endlichkeit aller $H^i(X, \mathcal{F}')$. \square

Lemma 2.6. *Sei X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ ein Morphismus von Torsionsgarben, der außerhalb einer abgeschlossenen Menge S ein Isomorphismus ist. Sei $i_0 \geq 2$. Dann gilt $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \geq i_0$, genau dann wenn alle $H^i(X, \mathcal{F}') = 0$ für alle $i \geq i_0$.*

Beweis: Genauso. \square

Satz 2.7. *Sei X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k , \mathcal{F} eine Torsionsgarbe mit Ordnung aller Schnitt prim zur Charakteristik von k . Dann verschwindet $H^q(X, \mathcal{F})$ für $q > 2$.*

Für glatte Kurven und konstante Garben haben wir den Satz bereits gezeigt.

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation gehen wir davon aus, dass X irreduzibel ist. Sei K der Funktionenkörper,

$$\eta : \text{Spec } K \rightarrow X$$

der generische Punkt. Da Kohomologie mit direkten Limiten vertauscht, können wir \mathcal{F} konstruierbar annehmen. Wir betrachten

$$\mathcal{F} \rightarrow \eta_* \eta^* \mathcal{F}$$

Die Halme in η stimmen überein (denn generisch ist \mathcal{F} lokal-konstant). Hierauf folgt, dass der Morphismus ein Isomorphismus ist über einer offenen Teilmenge von X (s.u.). Es genügt also, die Aussage für $\eta_* \eta^* \mathcal{F}$ zu beweisen. Wir wollen die Leray Spektralsequenz

$$H^p(X, R^q \eta_* \eta^* \mathcal{F}) \rightarrow H^{p+q}(\text{Spec } K, \eta^* \mathcal{F})$$

analysieren. Dafür zeigen wir:

- (i) $H^q(\text{Spec } K, \eta^* \mathcal{F}) = 0$ für $q \geq 2$
- (ii) $R^q \eta_* \eta^* \mathcal{F} = 0$ für $q \geq 2$
- (iii) $H^p(X, R^q \eta_* (\eta^* \mathcal{F})) = 0$ für $p > 0, q > 0$.

Die erste Aussage ist wieder Tsens Theorem. $R^q \eta_* \eta^* \mathcal{F}$ berechnet sich als Garbifizierung von $U \mapsto H^q(\eta^{-1}U, \eta^* \mathcal{F})$. Daher folgt (2) aus (1). Schließlich gilt $\mathcal{O}_{X_{\text{et}}, \bar{\eta}} = \bar{K}$ und mit Korollar 1.19 folgt

$$R^q \eta_* (\eta^* \mathcal{F})_{\bar{\eta}} = 0 \quad q > 0$$

Die höheren direkten Bilder sind also in einer abgeschlossenen Teilmenge konzentriert und haben keine höhere Kohomologie. Dies zeigt (3).

Die Spektralsequenz hat ein einziges Differential, das möglicherweise ungleich 0 ist, nämlich

$$H^0(X, R^1 \eta_* \eta^* \mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, \eta_* \eta^* \mathcal{F})$$

und degeneriert an E_3 . Aus dem Verschwinden der Endterme folgt daher ein Verschwinden der Anfangsterme wie behauptet.

Ist X nicht irreduzibel, muss man η durch die Vereinigung aller generischen Punkte ersetzen. \square

Übungsaufgabe 2.5. Sei \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf einer irreduziblen Varietät X mit generischem Punkt η . Sei $\bar{\eta}$ ein geometrischer Punkt über η . Angenommen, $\mathcal{F}_{\bar{\eta}} = 0$. Dann gibt es eine offene Teilmenge U von X mit $\mathcal{F}|_U = 0$.

Wir benötigen eine Aussage über Kohomologie von endlichen Morphismen, deren Beweis wir ins nächste Kapitel verschieben. Vergleiche auch [FK] §3.

Satz 2.8. *Sei $f : Y \rightarrow X$ ein endlicher Morphismus von Varietäten, \mathcal{F} eine étale Garbe auf Y , $\bar{x} : \text{Spec } \kappa \rightarrow X$ ein geometrischer Punkt so dass $Y \times_X \bar{x} = \coprod_{i=1}^n \bar{y}_i$ mit $\bar{y}_i \cong \text{Spec } \kappa$. Dann gilt*

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_{\bar{y}_i}$$

Insbesondere ist f_ exakt.*

Mit Leray Spektralsequenz folgt hieraus

$$H^i(Y_{\text{ét}}, \mathcal{F}) = H^i(X, f_*\mathcal{F})$$

Satz 2.9. *Sei $f : Y \rightarrow X$ endlich, \mathcal{F} eine konstruierbare Garbe auf Y . Dann ist $f_*\mathcal{F}$ konstruierbar.*

Diese Sätze wenden wir auf die Normalisierung $\tilde{X} \rightarrow X$ einer Kurve an. Der Morphismus ist endlich, \tilde{X} dann normal, also glatt.

Satz 2.10. *Sei X eine affine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k , \mathcal{F} eine Torsionsgarbe mit Ordnung aller Schnitt prim zur Charakteristik von k . Dann verschwindet $H^q(X, \mathcal{F})$ für $q > 1$.*

Beweis: Wir reduzieren zunächst auf den glatten Fall. Angenommen, der Satz ist für glatte affine Kurven gezeigt. Sei \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf X . Dann ist

$$\mathcal{F} \rightarrow f_*f^*\mathcal{F}$$

ein Isomorphismus außerhalb endlich vieler Punkte. Die Aussage für \mathcal{F} auf X folgt aus der für $f^*\mathcal{F}$ auf \tilde{X} .

Sei ab jetzt also X glatt, affin. Ohne Einschränkung ist \mathcal{F} konstruierbare Garbe von Λ -Moduln für $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nach Satz 2.7 ist $H^2(X, \mathcal{F}) = 0$ zu zeigen. Der Funktor ist rechtsexakt. Wegen Korollar 1.16 ist \mathcal{F} Quotient einer Garbe der Form

$$\tilde{Y}^\Lambda \quad q : Y \rightarrow X \text{ étale}$$

Der Funktor H^2 ist rechtsexakt. Es genügt also \tilde{Y}^Λ zu betrachten. Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\phi : \tilde{Y}^\Lambda \rightarrow q_*\Lambda$$

induziert von

$$\text{Hom}_\Lambda(\tilde{Y}^\Lambda, q_*\Lambda) = \text{Mor}(\tilde{U}, q_*\Lambda) = \Gamma(U, q_*\Lambda) = \Gamma(U \times_X U, \Lambda)$$

und dem Bild von 1 unter der abgeschlossenen Abbildung $\Delta : U \rightarrow U \times_X U$.

Im generischen Punkt haben beide Garben den Halm $\Lambda^{\deg q_\eta}$. Es genügt daher die Aussage für $q_*\Lambda$ zu beweisen.

Sei \bar{Y} die Normalisierung von X in $k(Y)$. Dann ist Sei $j : Y \rightarrow \bar{Y}$ eine relative Kompatifizierung, also eine offene Immersion in ein endliches $\bar{q} : \bar{Y} \rightarrow X$. Die natürliche Abbildung

$$\bar{q}_*\Lambda \rightarrow q_*\Lambda = j_*\bar{q}\Lambda$$

ist ebenfalls ein Isomorphismus im generischen Punkt. Wegen

$$H^i(X, \bar{q}_*\Lambda) = H^i(\bar{Y}, \Lambda)$$

folgt die Aussage nun aus Korollar 2.4 □

Satz 2.11. *Sei X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei \mathcal{F} eine konstruierbare Garbe auf X , mit Ordnung aller Schnitte teilerfremd zur Charakteristik. Dann sind alle $H^q(X, \mathcal{F})$ endlich.*

Beweis: Wie im letzten Beweis genügt es, den Fall von glatten X zu behandeln. ($\mathcal{F} \rightarrow f_*f^*\mathcal{F}$ ist injektiv generisch ein Isomorphismus, mit \mathcal{F} ist auch $f_*f^*\mathcal{F}$ konstruierbar).

Behauptung. *Es genügt zu zeigen, dass sich jedes \mathcal{F} einbetten lässt in eine konstruierbare Garbe mit endlichen Kohomologiegruppen.*

Angenommen, dies ist möglich. Wir betrachten

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow 0$$

Die Aussage sei wahr für \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 . Die lange exakte Kohomologiesequenz lautet

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{F}_1) \rightarrow H^0(\mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{F}_1) \rightarrow H^1(\mathcal{G}) \rightarrow H^2(\mathcal{F}) \rightarrow H^2(\mathcal{F}_1)$$

Endlichkeit für \mathcal{F} folgt aus der für $H^0(\mathcal{G})$ und $H^1(\mathcal{G})$. Mit der langen exakten Sequenz für die zweite kurze exakte Sequenz reduzieren wir auf $H^0(\mathcal{G}')$. Diese Gruppe ist endlich, da \mathcal{G}' konstruierbar ist.

Sei nun \mathcal{F} eine konstruierbare Garbe von Λ -Moduln, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dann ist \mathcal{F} Untergarbe einer endlichen direkten Summe von Garben der Form $f_{\nu*}\Lambda$ für $f_\nu : Y_\nu \rightarrow X$ endlich. Ohne Einschränkung sind die Y_ν normal der Dimension 0, 1. Dann sind die

$$H^i(X, f_{\nu*}\Lambda) = H^i(Y_\nu, \Lambda)$$

endlich nach Korollar 2.4. □

Übungsaufgabe 2.6. Sei \mathcal{F} konstruierbare Garbe von Λ -Moduln auf einer Varietät X , $x \in X$ ein Punkt, $s \in \mathcal{F}_x$ ein Keim. Dann gibt es einen endlichen Morphismus $f : Y \rightarrow X$ und eine natürliche Abbildung $\iota : \mathcal{F} \rightarrow f_*\Lambda$, so dass $\iota(s) \neq 0$.

Korollar 2.12. Sei k ein Körper, $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} k$ eine Kurve, \mathcal{F} eine konstruierbare Garbe auf X mit Ordnung aller Schnitt teilerfremd zur Charakteristik von k . Dann sind die Garben

$$R^i \pi_* \mathcal{F}$$

konstruierbar für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und verschwinden für $i \geq 3$. Ist X affin, so verschwinden sie für $i \geq 2$.

Beweis: $R^i \pi_* \mathcal{F}$ ist eine etale Garbe auf $\operatorname{Spec} k$. Wir betrachten den Halm in einem geometrischen Punkt $\operatorname{Spec} \bar{k}$. Nach Korollar 1.19 ist er gegeben durch

$$H^i(\bar{X}, \bar{\mathcal{F}})$$

wobei $\bar{X} = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k}$. Dies ist eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Nach den bisher bewiesenen Sätzen ist der Halm endlich und verschwindet in den angegebenen Bereichen. \square

Übungsaufgabe 2.7. Eine etale Garbe auf $\operatorname{Spec} k$ ist genau dann konstruierbar, wenn der Halm in einem geometrischen Punkt endlich ist.

Kapitel 3

Eigentlicher Basiswechsel

Wir betrachten ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & T \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Für jede Garbe \mathcal{F} auf Y definieren wir die *Basiswechselabbildung*:

$$g^* f_* \mathcal{F} \rightarrow f'_*(g')^* \mathcal{F}$$

Wir wenden f_* an auf $\mathcal{F} \rightarrow (g')^* \mathcal{F}$ und erhalten

$$f_* \mathcal{F} \rightarrow f_* g'_*(g')^* \mathcal{F} = g_* f'_*(g')^* \mathcal{F}$$

Nun nutzen wir die Adjunktion zwischen g_* und g^* .

Die Konstruktion dehnt sich auf die derivierten Funktoren aus. Sei \mathcal{I}^* eine injektive Auflösung von \mathcal{F} und \mathcal{J}^* eine injektive Auflösung von $(g')^* \mathcal{F}$. Da $(g')^*$ exakt ist, ist dies eine injektive Auflösung von $(g')^* \mathcal{F}$. Wir erhalten natürliche Abbildungen

$$g^* f_* \mathcal{I}^* \rightarrow f'_*(g')^* \mathcal{I}^* \rightarrow f'_* \mathcal{J}^*$$

Es gilt

$$H^i(f'_* \mathcal{J}^*) = R^i f'_*(g')^* \mathcal{F}$$

und

$$H^i(g^* f_* \mathcal{I}^*) = g^* H^i(f_* \mathcal{I}^*) = g^* R^i f_* \mathcal{F}$$

Wir wollen untersuchen, unter welchen Voraussetzungen der Basiswechselhomomorphismus ein Isomorphismus ist.

Übungsaufgabe 3.1. Sei f eine abgeschlossene Immersion, T beliebig. Dann ist Basiswechselmorphimus ein Isomorphismus.

Endliche Morphismen

Satz 3.1 (Eigentlicher Basiswechsel für endliche Morphismen). *Sei $f : Y \rightarrow S$ endlicher Morphismus von Varietäten, $g : T \rightarrow S$ ein Morphismus, $X = Y \times_S T$. Seien f', g' wie im Basiswechseldiagramm oben. Dann ist der Basiswechselhomomorphismus für alle i ein Isomorphismus.*

Beweis: Die wesentliche Zutat ist Satz 2.8. Danach verschwinden die höheren direkten Bilder für f und f' . Für müssen die Aussage nur für $i = 0$ betrachten. \mathcal{F} eine etale Garbe auf Y , $\bar{t} : \text{Spec } \kappa \rightarrow T$ ein geometrischer Punkt. Wir vergleichen die Halme von $g^* f_* \mathcal{F}$ und $f'_*(g')^* \mathcal{F}$ in \bar{t} . Sei $\bar{s} = t \circ \bar{t}$ der geometrische Punkt von S , so dass

$$X \times_S \bar{s} = X \times_T \bar{t} = \prod_{i=1}^n \bar{x}_i$$

mit (ohne Einschränkung) $\bar{x}_i \cong \text{Spec } \kappa$. Dann ist

$$Y \times_S \bar{s} = \prod_{i=1}^n \bar{y}_i$$

mit $\bar{y}_i = g' \circ \bar{x}_i$. Dann gilt wieder mit Satz 2.8

$$g^* f_* \mathcal{F}_{\bar{t}} = (f_* \mathcal{F})_{\bar{s}} = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_{\bar{y}_i}$$

und andererseits

$$f'_*(g')^* \mathcal{F}_{\bar{t}} = \prod_{i=1}^n (g')^* \mathcal{F}_{\bar{x}_i} = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_{\bar{y}_i}$$

□

Es ist jetzt also Zeit, unsere Schulden zu begleichen.

Beweis von Satz 2.8: Sei $f : Y \rightarrow S$ endlich, \mathcal{F} etale Garbe auf Y . Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt, $A = \mathcal{O}_{S_{\text{et}}, \bar{s}}$. Nach Korollar 1.19 gilt

$$(f_* \mathcal{F})_{\bar{s}} = H^0(\bar{Y}, \bar{F})$$

wobei $\bar{Y} = Y \times_S \text{Spec } A$. Da f endlich ist, ist $\bar{Y} = \text{Spec } B$ mit $A \rightarrow B$ endliche Ringerweiterung, A strikt henselsch. Aus kommutativer Algebra (vergl. [FK] Lemma 3.1) folgt, dass $B = \prod_1^n B_i$ mit B_i lokal, $A \rightarrow B_i$ ein lokaler Homomorphismus. Der Restklassenkörper von B_i ist dann der geometrische Punkt \bar{y}_i . Die Behauptung folgt mit einer zweiten Anwendung von Korollar 1.19. □

Übungsaufgabe 3.2. Ein lokaler Ring A mit Restklassenkörper κ heißt *henselsch*, wenn gilt: Jedes Polynom $f \in A[X]$ mit einer Nullstelle $\bar{a} \in \kappa$ mit $f'(\bar{a}) \neq 0$ in κ hat eine eindeutige Nullstelle $a \in A$ mit Reduktion \bar{a} . Zeigen Sie: Sei A henselsch, $A \rightarrow B$ endlich. Dann ist $B = \prod_{i=1}^n B_i$ mit B_i lokal, $A \rightarrow B_i$ lokal.

Definition 3.2. Ein endlicher Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt rein inseparabel, es über jedem Punkt von Y genau einen Punkt von X gibt und die Restklassenkörpererweiterung ist rein inseparabel.

Übungsaufgabe 3.3. Äquivalent hierzu ist: Über jedem geometrischen Punkt von Y (mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper κ) gibt es genau einen geometrischen Punkt von Y mit Werten in κ .

Beispiel. (i) Sei K/k rein inseparable Körpererweiterung, X/k eine Varietät. Dann ist $X_K \rightarrow X$ rein inseparabel.

(ii) $X \rightarrow X_{red}$ (Reduktion der Strukturgarbe) ist rein inseparabel.

Für eine Varietät X sei $\text{Et}(X)$ die Kategorie der etalen X -Varietäten.

Lemma 3.3. Sei $f : X \rightarrow Y$ rein inseparabel. Dann sind die Kategorien $\text{Et}(X) \rightarrow \text{Et}(Y)$ äquivalent.

Beweis: Mit der Formel aus Satz 2.8 sehen wir, dass f_* und f^* zueinander invers sind. Der Rest benutzt die Repräsentierbarkeitstheorie aus Kapitel 1, vergl. [FK] Prop. 3.16. \square

Beweis von Satz 2.9: Sei $f : Y \rightarrow S$ endlich, \mathcal{F} konstruierbare Garbe auf Y . Wir müssen zeigen, dass $f_*\mathcal{F}$ konstruierbar ist. Nach Kapitel 1 genügt es zu zeigen:

Behauptung. Es gibt ein $U \rightarrow S$ etale, so dass für $\mathcal{G} = \mathcal{F}|_U$ und $g : Y \times_S U \rightarrow U$ die Garbe $g_*\mathcal{G}$ konstruierbar ist.

Wir können annehmen, dass Y und S irreduzibel sind und f surjektiv. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $S = \text{Spec } k$ ein Punkt ist. Dann ist $Y = \text{Spec } L$ mit L/k eine endliche Körpererweiterung. Diese faktorisiert in $L/K'/k$ mit K'/k separabel, L/K' rein inseparabel. Sei K eine normale Hülle von K'/k und $\tilde{L} = LK$. Dann gilt für $U = \text{Spec } K$

$$Y \times_S U = \text{Spec } K \otimes_k L = \coprod_{i=1}^d \text{Spec } \tilde{L}$$

wobei $d = [K' : k]$. Insbesondere ist L/K rein inseparabel.

Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück. Die obige Überlegung lässt sich anwenden auf den generischen Punkt $\text{Spec } k(S)$ von S . Alle Objekte lassen sich ausdehnen und wir erhalten $U \rightarrow S$ etale, so dass

$$Y \times_S U \xrightarrow{g'} \coprod_{i=1}^n U \xrightarrow{h} U$$

faktorisiert mit g' rein inseparabel. Die Behauptung ist trivial für h . Für rein inseparable Erweiterungen folgt die Aussage aus Lemma 3.3. \square

Hauptsatz

Theorem 3.4 (Eigentlicher Basiswechsel). *Sei $f : X \rightarrow S$ eigentlich und*

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{f'} & T \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

kartesisch. Dann ist für jede Torsionsgarbe \mathcal{F} der Basiswechselhomomorphismus

$$g^* R^i f_* \mathcal{F} \rightarrow R^i f'_* g'^* \mathcal{F}$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung. Falls f endlich ist, so gilt die Aussage bereits nach Satz 3.1.

Der wichtigste Spezialfall ist, wenn $T = \bar{s}$ ein geometrischer Punkt von S ist. Dann ist $g^*(R^i f_* \mathcal{F}) = (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{s}}$ der Halm des höheren direkten Bildes und $R^i f'_* = H^i$ die Kohomologie.

Korollar 3.5. *Sei $f : X \rightarrow X$ eigentlich und $\bar{s} : \text{Spec } \kappa \rightarrow S$ ein geometrischer Punkt, \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf X . Dann gilt*

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{s}} = H^i(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}_{X_{\bar{s}}})$$

Wir führen den Beweis nur unter einschränkenden Voraussetzungen:

- \mathcal{F} ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modulgarbe mit n invertierbar auf X
- f ist projektiv

Für den Beweis ist es besser, statt mit den Kohomologiegarben $R^i f_* \mathcal{F}$ mit den Komplexen $Rf_* \mathcal{F}$ zu arbeiten.

Definition 3.6. *Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Varietäten. Sei \mathcal{F}^\bullet ein nach unten beschränkter Komplex von Torsionsgarben auf X . Sei I^\bullet eine injektive Auflösung von \mathcal{F}^\bullet , d.h. $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow I^\bullet$ ist ein Quasiisomorphismus und alle Komponenten von I^\bullet sind injektiv. Dann heißt*

$$Rf_* \mathcal{F}^\bullet = f_* I^\bullet$$

direkter Bildkomplex von \mathcal{F}^\bullet .

$Rf_* \mathcal{F}$ ist wohldefiniert bis auf Quasiisomorphismus. Der richtige formale Rahmen hierfür sind derivierte Kategorien, die wir jedoch nicht einführen wollen. In dieser Sprache lautet die Leray-Spektralsequenz für eine Verknüpfung $g \circ f$

$$Rf \circ Rg = R(f \circ g)$$

(wobei $=$ bedeutet bis auf kanonischen Quasi-Isomorphismus).

Lemma 3.7. *Sei $f : X \rightarrow S$ etc. wie im Theorem. Sei \mathcal{F}^\bullet ein nach unten beschränkter Komplex von Torsionsgarben. Wenn das Theorem für alle Komponenten \mathcal{F}^n von \mathcal{F}^\bullet gilt, dann auch für den Komplex \mathcal{F}^\bullet , d.h.*

$$g^* Rf_* \mathcal{F} \rightarrow Rf'_* g'^* \mathcal{F}$$

ist ein Quasi-Isomorphismus.

Beweis: Zu zeigen ist, dass für alle i die induzierte Abbildung auf H^i ein Isomorphismus ist.

Für $j \geq 0$ sei $\sigma_{\leq j} \mathcal{F}^\bullet$ die dumme Abschneidung, d.h. der Komplex mit

$$(\sigma_{\leq j} \mathcal{F}^\bullet)^n = \begin{cases} \mathcal{F}^n & n \leq j \\ 0 & n > j \end{cases}$$

Wir haben dann kurze exakte Sequenzen von Komplexen

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^j[-j] \sigma_{\leq j} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \sigma_{\leq j-1} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow 0$$

Diese induzieren lange exakte Kohomologiesequenzen. Aus den Basiswechselisomorphismen für die \mathcal{F}^j und alle H^i werden so induktiv Isomorphismen für alle $\sigma_{\leq j} \mathcal{F}^\bullet$ und alle H^i .

Ist \mathcal{F}^\bullet ein beliebiger Komplex, so hängt $H^i(Rf_* \mathcal{F}^\bullet)$ nur von $\sigma_{\leq i+1} \mathcal{F}^\bullet$ ab. \square

Weitere Reduktionsargumente erhalten wir für Verknüpfungen von Morphismen.

Lemma 3.8. *Sei $f = f_1 f_2$ mit $f_2 : X \rightarrow X'$, $f_1 : X' \rightarrow S$ eigentlich.*

- (i) *Wenn das Theorem für f_1 und f_2 gilt, dann auch für f .*
- (ii) *Wenn das Theorem für f und f_1 gilt, dann auch für f_2 für die Komplexe der Form $Rf_{1*} \mathcal{F}^\bullet$.*

Beweis: Beide Aussagen folgen aus der Leray-Spektralsequenz für die Komposition in der Form $Rf_* = Rf_{1*} Rf_{2*}$. \square

Lemma 3.9. *Es genügt, Theorem 3.4 in der Situation zu beweisen, dass alle Fasern höchstens Dimension 1 haben.*

Beweis: Sei $f : X \rightarrow S$ projektiv. Ohne Einschränkung ist S affin und $f = \pi \circ i$, wobei $i : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ eine abgeschlossene Einbettung und $\pi : \mathbb{P}_S^n \rightarrow S$ die Projektion ist. Da eigentlicher Basiswechsel für die endliche Abbildung i gilt, genügt es, den Fall $X = \mathbb{P}_S^n$ zu behandeln.

Es gibt einen surjektiven endlichen Morphismus

$$p : (\mathbb{P}_S^1)^n \rightarrow \mathbb{P}^n$$

Für $\pi \circ p : (\mathbb{P}_S^1)^n \rightarrow S$ gilt Theorem 3.4, denn diese Abbildung faktorisiert als n relative Kurven. Nach Lemma 3.8 gilt eigentlicher Basiswechsel dann für π und die Komplexe von Garben von der Form $p_* \mathcal{F}$ für beliebige Torsionsgarben \mathcal{F} .

Sei \mathcal{G} eine beliebige Torsionsgarbe auf \mathbb{P}_S^n . Dann ist

$$\mathcal{G} \rightarrow p_* p^* \mathcal{G} = \mathcal{G}^0$$

injektiv. Induktiv erhalten wir eine Auflösung von \mathcal{G} durch einen Komplex von Garben \mathcal{G}^\bullet wobei $\mathcal{G}^n = p_* \mathcal{F}^n$ für geeignetes n . Für alle Komponenten von \mathcal{G}^\bullet gilt eigentlicher Basiswechsel, nach Lemma 3.7 also auch für den ganzen Komplex, also für \mathcal{G} . \square

Lemma 3.10. *Theorem 3.4 gilt für $f : X \rightarrow S$ und beliebiges T , wenn für alle geometrischen Punkte \bar{s} von S gilt*

$$H^i(X \times_S \text{Spec } \mathcal{O}_{S_{\text{et}}, \bar{s}}, \mathcal{F}) \cong H^i(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}_{\bar{s}})$$

Insbesondere genügt es also, Theorem 3.4 nur in der Situation zu beweisen, dass $S = \text{Spec } A$ Spektrum eines strikt henselschen Rings und $T = s = \text{Spec } A/m$ der Restklassenkörper.

Beweis: Ohne Einschränkung sind S und T affin. Wegen der Verträglichkeit von etaler Kohomologie mit direkten Limiten, können wir annehmen, dass T endlich erzeugt über S ist. Um zu überprüfen, dass ein Morphismus von Garben ein Isomorphismus ist, genügt es die Halme in geometrischen Punkten zu vergleichen. Mit anderen Worten, es genügt Korollar 3.5 zu beweisen.

Sei also nun \bar{s} geometrischer Punkt S . Sei

$$\bar{X} = X \times_S \text{Spec } \mathcal{O}_{S_{\text{et}}, \bar{s}}$$

Dann gilt nach Korollar 1.19

$$g^* R^i f_* \mathcal{F} = (R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{s}} = H^i(\bar{X}, \mathcal{F}|_{\bar{X}})$$

Andererseits ist

$$R^i f'_* g'^* \mathcal{F} = H^i(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}_{\bar{s}})$$

\square

Damit ist eigentlicher Basiswechsel für beliebiges projektive $X \rightarrow S$ auf den Fall der projektiven Geraden über strikt henselschen Ringen reduziert.

Der Fall relativer Kurven

Satz 3.11. *Sei A ein strikt henselscher Ring mit abgeschlossenem Punkt s . Für $f : X \rightarrow S = \text{Spec } A$ mit $\dim X_s \leq 1$ und n invertierbar auf X ist*

$$H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X_s, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

surjektiv und sogar bijektiv für $i = 0$.

Beweis: Nach Satz 2.7 verschwindet $H^i(X_s, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ für $i > 0$. Die Fälle $i = 0, 1, 2$ werden gesondert behandelt.

$i = 0$: Der Rang von $H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ist die Zahl der Zusammenhangskomponenten von X .

Behauptung. *Die Zahl der Zusammenhangskomponenten von X und X_s stimmen überein.*

Nach Zariskis Hauptsatz bzw. Stein Faktorisierung (Hartshorne III Cor. 11.5) genügt es, den Fall zu betrachten, dass f endlich ist. Dann ist die Aussage ein Spezialfall von eigentlichem Basiswechsel für endliche Morphismen, d.h. sie folgt aus der Strukturtheorie für endliche Überlagerungen von strikt henselschen Ringen.

$i = 1$: Für $i = 1$ kann etale Kohomologie als Check-Kohomologie berechnet werden.

Übungsaufgabe 3.4. Sei F eine endliche abelsche Gruppe. Dann gibt es eine natürliche Bijektion zwischen den Elementen von $\check{H}^r(X, F)$ und den Isomorphieklassen von endlichen etalen $X' \rightarrow X$ mit $\text{Aut}_X(X') \cong F$.

Solche Überlagerungen heißen *galois* mit Galoisgruppe F .

Zu zeigen ist also, dass sich jede $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Galoisüberlagerung von X_s zu einer Galoisüberlagerung von X liftet. Sei $X_n = X \times_{\text{Spec } A} A/m^n$. Es ist dann speziell $X_1 = X_s$. Alle X_n haben denselben zugrundeliegenden topologischen Raum, die Morphismen $X_n \rightarrow X_{n-1}$ sind rein inseparabel (siehe Definition 3.2). Nach Lemma 3.3 stimmen die Kategorien von etalen Garben auf ihnen überein. Daher stimmen auch die Galoisüberlagerungen überein. Aus dem Artinschen Approximationssatz (siehe unten) folgt dann, dass sich die Galoisüberlagerung auch nach X selbst liftet.

$i = 2$: Wir haben $\mu_n = \mathbb{Z}/n$ über A . Die Kummersequenz induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) & \longrightarrow & H^2(X, \mu_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Pic}(X_s) & \longrightarrow & H^2(X_s, \mu_n) \end{array}$$

Die untere Abbildung ist surjektiv, da $H^2(X_s, \mathcal{O}^*)$ p -Torsion ist (p die Charakteristik von s), siehe [FK] Bemerkung nach Lemma 5.2. Es genügt also zu zeigen, dass die linke Abbildung surjektiv ist. Wieder mit Artin Approximation genügt es, jedes Gradenbündel auf X_1 zu einem auf X_n zu liften. Hierfür arbeiten wir mit Zariski-Kohomologie auf dem topologischen Raum X_1 . Sei

$$\mathcal{J} = m^n \mathcal{O}_X / m^{n+1} \mathcal{O}_X = \text{Ker}(\mathcal{O}_{X_{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_n})$$

Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{a \rightarrow 1+a} \mathcal{O}_{X_{n+1}}^* \rightarrow \mathcal{O}_{X_n}^* \rightarrow 1$$

ist exakt. Die Garbe \mathcal{J} ist kohärent und X_1 hat Dimension kleiner gleich 1. Daher verschwindet $H^2(X_1, \mathcal{J})$. Aus der langen exakten Kohomologiesequenz folgt die Surjektivität von

$$H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_{n+1}^*}) \rightarrow H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_n^*})$$

□

Die wesentliche Zutat hier war der Approximationssatz von Artin:

Theorem 3.12 (Artinscher Approximationssatz). *Sei k ein Körper (oder ein exzellenter Dedekindring wie \mathbb{Z}), A die Henselisierung einer endlich erzeugten k -Algebra, I ein Primideal von A .*

Seien weiter F ein Funktor von der Kategorie der A -Algebren in die Kategorie der Mengen, der mit filtrierten direkten Limiten vertauscht. Sei $\bar{x} \in \varinjlim F(A/I^n)$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in F(A)$, so dass $x = \bar{x} \in F(A/I^n)$.

Bemerkung. Die Ringe A im Beweis des Satzes sind allgemeiner als die Voraussetzung des Approximationssatzes. Da étale Kohomologie mit Limiten vertauscht, können wir aber ohne Einschränkung annehmen, dass alles endlich erzeugt über \mathbb{Z} ist.

Die Funktoren, die wir betrachten, sind

$$B \mapsto \check{H}^1(\mathrm{Spec} B \times_{\mathrm{Spec} A} X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

und

$$B \mapsto H^1(\mathrm{Spec} B \times_{\mathrm{Spec} A} X, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}(X_B)$$

Hauptanwendung des Approximationssatzes ist die Konstruktion von Modulräumen. Deformationstheorie behandelt die Frage nach dem Übergang von A/I zu A/I^n , mit dem Approximationssatz erhält man dann lokale Darstellbarkeit über A .

Beweis von Theorem 3.4: Nach Lemma 3.9 und Lemma 3.10 genügt es den Fall zu betrachten, dass $f : X \rightarrow S$ eine relative Kurve über einem exzellenten strikt henselschen Ring A ist.

Wir sagen, eine Garbe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Moduln erfüllt Bedingung $*$, wenn

$$H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_s, \mathcal{F})$$

surjektiv ist und bijektiv für $i = 0$.

Nach Satz 3.11 erfüllt also $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Bedingung $*$.

Behauptung. *Jede konstruierbare Garbe ist enthalten in einer Garbe, die Bedingung $*$ erfüllt.*

Sei $\pi : X' \rightarrow X$ endlich. Dann ist π_* exakt und Satz 3.11 besagt, dass

$$H^i(X, \pi_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X_s, \pi_{s,*}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

injektiv ist und bijektiv für $i = 0$. Eigentlicher Basiswechsel gilt für den endlichen Morphismus π , daher ist

$$\pi_{s,*}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = (\pi_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|_{X_s}$$

Insgesamt erfüllen Garben der Form $\pi_*\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Bedingung $*$. Jede konstruierbare Garbe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modul in einer direkten Summe von solchen Garben enthalten ([FK] 4.12).

Sei also \mathcal{F} konstruierbar, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ injektiv in eine Garbe, die $*$ erfüllt. Wir betrachten die lange exakte Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{G}/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X_s, \mathcal{F}_s) & \longrightarrow & H^0(X_s, \mathcal{G}_s) & \longrightarrow & H^0(X_s, \mathcal{G}/\mathcal{F}_s) \longrightarrow H^1(X_s, \mathcal{F}_s) \end{array}$$

Es folgt, dass die Abbildung auf $H^0(X, \mathcal{F})$ injektiv ist. Dies gilt für alle konstruierbaren \mathcal{F} , also auch für \mathcal{G}/\mathcal{F} . Dann ist die Abbildung auf $H^0(X, \mathcal{F})$ sogar bijektiv.

Behauptung. *Die Abbildung ist bijektiv auf $H^i(X, \mathcal{F})$ für alle \mathcal{F} .*

Wir argumentieren mit Induktion nach i und haben den Induktionsanfang erledigt. Sei die Behauptung wahr für $i \leq p$. Wieder betrachten wir \mathcal{F} konstruierbar und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, so dass \mathcal{G} Bedingung $*$ erfüllt. Zunächst betrachten wir $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow 0$ mit \mathcal{I} injektiv. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H^{p-1}(X, \mathcal{I}) & \longrightarrow & H^{p-1}(X, \mathcal{K}) & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{p-1}(X_s, \mathcal{I}_s) & \longrightarrow & H^{p-1}(X_s, \mathcal{K}_s) & \longrightarrow & H^p(X_s, \mathcal{G}_s) & \longrightarrow & H^p(X_s, \mathcal{I}_s) \end{array}$$

sind die ersten beiden vertikalen Pfeile bijektiv nach Induktionsannahme. Es folgt sofort, dass die Abbildung auf $H^p(X, \mathcal{G})$ injektiv ist, wegen $*$ also bijektiv. Weiter betrachten wir wieder exakte Kohomologiesequenz für $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F} \rightarrow 0$. Diagrammjagd wie für $i = 0$ beendet das Argument. \square

Kapitel 4

l -adische Garben

In diesem Kapitel ist l eine Primzahl ungleich der Charakteristik des Grundkörpers, die p heißt.

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Wir betrachten projektive Systeme $M = (M_n, u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $M_n \in \mathcal{A}$ und $u_n : M_n \rightarrow M_{n+1}$. Sie bilden eine abelsche Kategorie.

Definition 4.1. Sei $M = (M_n)_n$ ein projektives System. Für $r \in \mathbb{Z}$ sei $M[r] = (M_{n+r}, u_{n+r})_n$ das verschobene System.

(i) M erfüllt die Mittag-Leffler-Bedingung, falls es für jedes n ein t gibt mit

$$\operatorname{Im}(M_m \rightarrow M_n) = \operatorname{Im}(M_t \rightarrow M_n) \quad \text{für alle } m \geq t$$

(ii) M erfüllt die Artin-Rees-Bedingung, falls es ein $t \geq 0$ gibt mit

$$\operatorname{Im}(M[m] \rightarrow M) = \operatorname{Im}(M[t] \rightarrow M) \quad \text{für alle } m \geq t$$

(iii) Ein System heißt AR-null, falls es $t \geq 0$ gibt mit

$$F[t] \rightarrow F$$

die Nullabbildung.

Übungsaufgabe 4.1. Sei \mathcal{A} die Kategorie der abelschen Gruppen.

(i) Sei M ein projektives System von abelschen Gruppen. Wenn M ML-null ist, so ist $\varprojlim M = 0$.

(ii) Sei $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von projektiven Systemen und F sei ML. Dann ist

$$0 \rightarrow \varprojlim F \rightarrow \varprojlim G \rightarrow \varprojlim H \rightarrow 0$$

exakt.

(iii) Sind alle M_n endlich, so ist M automatisch ML.

Die Strukturabbildungen $u_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ induzieren einen natürlichen Morphismus $u : M[1] \rightarrow M$, allgemeiner $u^r : M[r] \rightarrow M$.

Definition 4.2. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Die Kategorie $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ hat als Objekte projektive Systeme $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und als Morphismen

$$\text{Hom}_{\text{AR}}(M, N) = \text{Hom}_{r \geq 0}(M[r], N)$$

Bemerkung. Ein Morphismus in $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ wird also realisiert durch ein $f : M[r] \rightarrow N$. Dieser Repräsentant f und ein $f' : M[r'] \rightarrow N$ definieren denselben AR-Morphismus, wenn es ein $n \geq r, r'$ gibt so dass

$$f \circ u^{n-r} = f' \circ u^{n-r'}$$

Seien $M[r_1] \rightarrow M_2, M_2[r_2] \rightarrow M_3$ gegeben. Dann ist die Komposition definiert via

$$M[r_1 + r_2] \rightarrow M_2[r_2] \rightarrow M_3$$

Lemma 4.3. (i) Sei $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein projektives System, $u : M[1] \rightarrow M$ induziert von der Strukturabbildung. Dann ist u ein Isomorphismus in $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

(ii) Ein Objekt in $\text{AR} - \mathcal{A}$ ist genau dann 0, wenn die Identität gleich dem Nullmorphismus ist, es also ein r gibt mit $u^r : M[r] \rightarrow M$ die Nullabbildung, d.h. wenn M AR ist.

(iii) $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ist eine abelsche Kategorie. Der Funktor $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ist exakt.

Beweis: Die inverse Abbildung zu u wird repräsentiert durch $\text{id} : M[1] \rightarrow M[1]$. Die Komposition $u \circ \text{id}$ wird repräsentiert durch

$$M[2] \xrightarrow{u[1]} M[1] \xrightarrow{\text{id}} M[1]$$

In $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ist dies gleich der Identität von $M[1]$. Das Argument für die andere Komposition ist genauso.

Die zweite Aussage ist klar nach Definition.

Die Kategorie ist additiv und hat direkte Summen.

Sei $\bar{f} : M \rightarrow N$ ein Morphismus in $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Er wird repräsentiert durch einen Morphismus von projektiven Systemen $f : M[r] \rightarrow N$. Seien $K = \text{Ker } f$. Sei $f' : M[r'] \rightarrow N$ ein anderer Repräsentant mit Kern K' .

Behauptung. $K \cong K'$ in $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Ohne Einschränkung ist $r' \geq r$, $f' = fu^r$ und sogar $r = 1$. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' \cap \text{Ker } u & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K/u(K') & \longrightarrow & 0 \\ & & \subset \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \subset & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } u & \longrightarrow & M[1] & \xrightarrow{u} & M & \longrightarrow & \text{Coker } u & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Hierin ist das mittlere Rechteck kartesisch. Die beiden äußeren Pfeile sind daher injektiv. u ist ein AR-Isomorphismus, also sind $\text{Ker } u$ und $\text{Coker } u$ AR-null. Als Unterobjekte sind dann auch $K' \cap \text{Ker } u$ AR-null.

Wir überprüfen nun die universelle Eigenschaft. Sei $g : N \rightarrow M$ ein Morphismus mit $f \circ g = 0$. Dieser wird repräsentiert durch $g : N[n] \rightarrow M$ mit $f[n] \circ g = 0$ (nach eventuellem Vergrößern von n). Die Abbildung faktorisiert eindeutig durch $\text{Ker } f[n] \cong K$.

Die Argumente für den Kokern sind analog. \square

Übungsaufgabe 4.2. $\text{AR} - \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ist die Lokalisierung der Kategorie $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ der projektiven Systeme an der Menge der AR-Isomorphismen, also derjenigen Morphismen, für die Kern und Kokern AR-null sind.

Sei X eine Varietät. Ab jetzt ist l eine Primzahl, ungleich der Charakteristik von X , die p heißt.

Definition 4.4. Eine \mathbb{Z}_l -Garbe ist ein System (\mathcal{F}_n, u_n) , wobei \mathcal{F}_n eine étale \mathbb{Z}/l^{n+1} -Torsionsgarbe ist. Eine strikte l -adische Garbe ist eine \mathbb{Z}_l -Garbe $\text{Fh} = (\mathcal{F}_n, u_n)$, wenn gilt

- (i) $\mathcal{F}_n = 0$ für $n < 0$.
- (ii) \mathcal{F}_n konstruierbar für alle n .
- (iii) Für alle $n > 0$ induziert u_n einen Isomorphismus

$$\mathcal{F}_n \otimes_{\mathbb{Z}/l^{n+1}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}$$

Eine l -adische Garbe ist ein projektives System $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, u_n)$, das AR-isomorph zu einer strikten l -adischen Garbe ist. Morphismen von l -adischen Garben sind Morphismen in der AR-Kategorie.

Eine strikte l -adische Garbe heißt glatt oder lisse, wenn alle \mathcal{F}_n lokal-konstant sind.

Beispiel. $\mathbb{Z}_l := (\mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z})_n$ ist eine glatte l -adische Garbe, ebenso

$$\mathbb{Z}_l(1) = (\mu_{l^n})_n$$

wobei $\mu_{l^n} \subset \mathcal{O}_X^*$ die Garbe der l^n -ten Einheitswurzeln.

Wir beginnen mit dem Fall $X = \text{Spec } k$, k algebraisch abgeschlossen. Wir sprechen

Satz 4.5. Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist die Kategorie der l -adischen Garben auf $\text{Spec } k$ äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten \mathbb{Z}_l -Moduln.

Beweis: Die konstruierbaren l -adischen Garben sind in diesem endliche abelsche Gruppe. Wir betrachten die Funktoren

$$(F_n, u_n) \mapsto \varprojlim F_n \quad F \mapsto (F/l^{m+1}F, p_n)$$

zwischen der Kategorie der l -adischen Garben und der Kategorie der abelschen Gruppen. Die Projektionsabbildung $u : (F_{n+1}) \rightarrow (F_n)$ induziert einen Isomorphismus der projektiven Limiten. Daher ist \varprojlim wohldefiniert auf der AR-Kategorie. Wir betrachten ein striktes System. Dann ist $\varprojlim F_n$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Ist umgekehrt F ein endlich erzeugter \mathbb{Z}_l -Modul, so ist das System der $F/l^{n+1}F$ eine strikte l -adische Garbe. Die beiden Funktoren sind zu einander invers. \square

Insbesondere ist die Kategorie der l -adischen Garben in diesem Fall abelsch. Wir wollen es etwas expliziter.

Übungsaufgabe 4.3. Sei $(F_n)_n \rightarrow (G_n)_n$ ein AR-Morphismus von strikten l -adischen Garben auf $\text{Spec } k$, k algebraisch abgeschlossen. Dann sind Kern/Bild/Kokern Bild in der Kategorie der projektiven Systeme selbst wieder AR-äquivalent zu strikten l -adischen Garben.

Übungsaufgabe 4.4. Geben Sie ein Beispiel: (F_n, u_n) ein projektives System von endlichen abelschen Gruppen, $l^{n+1}F_n = 0$, alle $u_n = \text{surjektiv}$, aber $\varprojlim F_n$ ist nicht endlich erzeugt als \mathbb{Z}_l -Modul.

Übungsaufgabe 4.5. Seien F, G endlich erzeugte \mathbb{Z}_l -Moduln. Dann ist

$$(\text{Tor}_{\mathbb{Z}/l^n}(F/l^n F, G/l^n G))_n$$

AR-null.

Übungsaufgabe 4.6. (i) Die Kategorie der glatten l -adischen Garben auf $\text{Spec } k$ ist äquivalent zur Kategorie der stetigen Darstellungen von $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ in der Kategorie der endlich erzeugten \mathbb{Z}_l -Moduln.

(ii) Für allgemeines X erhält man stetige Darstellungen von $\pi_1(X, \bar{x})$.

Funktoren zwischen Kategorien von etalen Garben werden zu Funktoren zwischen Kategorien von l -adischen Garben, indem sie auf alle Komponenten angewendet werden. Ein Beispiel ist das Tensorprodukt, das Zurückziehen von Garben, aber auch die Halmbildung.

Definition 4.6. Sei X Varietät, \bar{x} ein geometrischer Punkt, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n, u_n)$ eine l -adische Garbe. Dann heißt

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} = (\mathcal{F}_{n, \bar{x}}, u_n)_n$$

Halm von \mathcal{F} in \bar{x} .

Der Halm ist eine l -adische Garbe auf einem geometrischen Punkt, kann also einfach als abelsche Gruppe aufgefasst werden.

Satz 4.7. Sei X Varietät, \mathcal{F} l -adische Garben. Dann hat X eine Stratifizierung durch lokal abgeschlossene Untervarietäten $Z_1, \dots, Z_N \subset X$, so dass $\mathcal{F}|_{Z_i}$ glatt ist.

Beweis: Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ eine strikte l -adische Garbe. Der wesentliche Schritt ist es zu zeigen, dass es eine nicht-leere offene Untervarietät $U \subset X$ gibt, auf der \mathcal{F} glatt ist, d.h. alle \mathcal{F}_n gleichzeitig lokalkonstant. Ohne Einschränkung ist X irreduzibel mit generischem Punkt η . Ohne Einschränkung ist \mathcal{F}_0 lokal-konstant. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n+1}/l^{n+1}\mathcal{F}_{n+1}$ und daher $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{n+1}/l\mathcal{F}_{n+1}$. Die Abbildung

$$l^{n+1} : \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow l^{n+1}\mathcal{F}_{n+1}$$

faktorisiert daher über \mathcal{F}_0 . Sei

$$\mathcal{C}_n = \text{Ker}(\mathcal{F}_0 \rightarrow l^{n+1}\mathcal{F}_{n+1})$$

Mit ein wenig Diagrammjagd sieht man, dass $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$. Die \mathcal{C}_n bilden also ein aufsteigendes System von Subobjekten in der Garbe \mathcal{F}_0 . Die Kategorie der konstruierbaren Garben ist noethersch, also wird das System stationär. Sei U die offene Menge, auf der alle (endliche vielen) \mathcal{C}_n lokal konstant sind.

Dann sind auch die Quotienten $l^{n+1}\mathcal{F}_{n+1} \cong \mathcal{F}_0/\mathcal{C}_n$ lokal-konstant auf U . Die Erweiterungen

$$0 \rightarrow l^{n+1}\mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow 0$$

sind ebenfalls lokal-konstant auf U . □

Korollar 4.8. *Eine l -adische Garbe verschwindet, wenn alle Halme in geometrischen Punkten verschwinden.*

Beweis: Ohne Einschränkung ist \mathcal{F} glatt. Sei \bar{x} ein geometrischer Punkt. Dann ist $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$ ein treuer Funktor auf der Kategorie der lokal-konstanten etalen Garben. Ist also (\mathcal{F}_n, u_n) eine l -adische Garbe, so dass der Halm in \bar{x} AR-null ist, dann gilt dies auch für (\mathcal{F}_n, u_n) . □

Lemma 4.9. *Sei $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von l -adischen Garben. Dann sind Kern und Kokern ebenfalls l -adische Garben. Insbesondere ist die Kategorie abelsch.*

Beweis: Mit noetherscher Induktion und Satz 4.7 genügt es, den Fall zu betrachten, dass \mathcal{F} und \mathcal{G} strikt l -adisch und glatt sind. Dann sind auch alle $\text{Ker}(\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{G}_n)$ endlich lokal-konstant. Die Halme in einem geometrischen Punkt sind AR-isomorph zu einem strikten l -adischen System. Dasselbe folgt dann auch für die Garben.

Das Argument für den Kokern ist das Gleiche. □

Lemma 4.10. *Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in der AR-Kategorie der \mathbb{Z}_l -Garben. Seien \mathcal{F}, \mathcal{H} l -adische Garben. Dann ist \mathcal{G} eine l -adische Garbe.*

Beweis: weggelassen. [FK] 12.11 oder SGA 4. □

Lemma 4.11. *Die Kategorie der l -adischen Garben ist noethersch.*

Beweis: Sei

$$\mathcal{F}^{(1)} \subset \mathcal{F}^{(2)} \subset \dots$$

eine Kette Unterobjekten einer l -adischen Garbe \mathcal{G} . Ohne Einschränkung ist \mathcal{G} glatt. Sei η ein generischer Punkt. Die Kette der Halme in einem geometrischen Punkt $\bar{\eta}$ wird stationär, d.h es gibt m

$$\mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(m')} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{(m)} \quad m' \geq m$$

Sei $U \subset X$ offen, so dass $\mathcal{G}/\mathcal{F}^{(m)}$ glatt auf U ist. Wir ersetzen X durch U .

Behauptung. $\mathcal{F}^{(m')} = \mathcal{F}^{(m)}$ für $m' \geq m$.

Wir betrachten $\mathcal{F}^{(m')}/\mathcal{F}^{(m)} \subset \mathcal{G}/\mathcal{F}^{(m)}$, d.h. ein Unterobjekt einer glatten Garbe, dessen Halm im generischen Punkt verschwindet. Zur Vereinfach der Notation betrachten wir $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Sei \bar{x} ein anderer geometrischer Punkt von U , der im Abschluss von η liegt. Jede etale Umgebung von \bar{x} induziert eine von η . Daher erhalten wir Spezialisierungsabbildungen $\mathcal{A}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{A}_{\bar{\eta}}$. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{B}_{\bar{\eta}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_{\bar{x}} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{B}_{\bar{x}} \end{array}$$

ist der rechte Pfeil ein Isomorphismus, da \mathcal{B} glatt ist. Also ist der linke Pfeil injektiv. Da $\mathcal{A}_{\bar{\eta}}$ verschwindet, verschwinden also alle Halme und damit ganz \mathcal{A} . \square

Schließlich ein technisches Lemma aus der homologischen Algebra für den späteren Gebrauch:

Lemma 4.12 (FK 12.14). *Sei $(K_n^*)_n$ ein beschränkter Komplex von projektiven Systemen etalen Garben. Es gelte*

$$l^{n+1}K_n^* = 0$$

und alle Einträge von K_n^ seien \mathbb{Z}/l^{n+1} -flach. Alle Kohomologiegarben $H^i(K_n^*)$ seien konstruierbar. Für alle n induziere*

$$K_n^* \otimes_{\mathbb{Z}/l^{n+1}} \mathbb{Z}/l^{n+1} \rightarrow K_{n-1}^*$$

einen Quasi-Isomorphismus. Dann sind die projektiven Systeme

$$(H^i(K_n^*))_n$$

l -adische Garben.

Wesentliche Zutat ist das Wissen, dass das System der Tor-Garben AR-null ist.

Ausblick

Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Varietäten, so definieren wir $R^i f_*$ auf der Kategorie der l -adischen Garben durch komponentenweises Anwenden von $R^i f_*$. Der Funktor wird wohldefiniert sein, wenn wir wissen, dass er konstruierbare Garben erhält.

Speziell für $Y = \text{Spec } k$ der Grundkörper erhalten wir l -adische Garben auf $\text{Spec } k$, also endlich erzeugte \mathbb{Z}_l -Moduln mit stetiger Operation der Galoisgruppe.

Definition 4.13. Sei $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ eine Varietät, \mathcal{F} eine l -adische Garbe auf X . Dann heißt

$$H^i(\overline{X}, \mathcal{F}) := R^i \pi_* \mathcal{F}$$

l -adische Kohomologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{F} .

Der zugrundeliegende \mathbb{Z}_l -Modul ist gegeben durch

$$\varprojlim H^i(X \times \text{Spec } \overline{k}, \mathcal{F}_n)$$

Wir sind vor allem an dem Fall $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_l$ interessiert.

Und da wir schon dabei sind: Die Kategorie der \mathbb{Q}_l -Garben ist die AR-Kategorie der Kategorie der \mathbb{Z}_l -Garben mit Morphismen tensoriert mit \mathbb{Q}_l . l -adische Kohomologie von $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_p$ ist definiert als

$$H^i(\overline{X}, \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_p) := H^i(\overline{X}, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_l$$

Es handelt sich dann um einen endlich-dimensionalen \mathbb{Q}_l -Vektorraum mit stetiger Operation von $\text{Gal}(\overline{k}/k)$.

Kapitel 5

Hauptsätze und Anwendungen

Ab jetzt ist X stets von endlichem Typ über einem Körper k . Alle Garben sind Torsionsgarben mit $\text{Char}(k) = p$ teilerfremd zur Ordnung der Schnitte. Wir müssen nun relativ rasch weitere wichtige Sätze auflisten.

Glatte Basiswechsel

Theorem 5.1 (Glatte Basiswechsel, [FK]). *Theorem 7.3* Sei

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{f'} & T \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

kartesisches Diagramm von Schemata von endlichem Typ über k . Sei g glatt. Dann ist der Basiswechsellhomomorphism ein Isomorphismus für alle Torsionsgarben mit Ordnung teilerfremd zur Charakteristik von k .

Wie im Fall von eigentliche Basiswechsel überträgt sich die Aussage sofort auf Komplexe von Torsionsgarben.

Kohomologie mit kompaktem Träger

Neben den Funktoren Rf_* und f^* gibt es auch die dualen Funktoren $Rf_!$ und $Lf^!$. Wir beginnen langsam.

Definition 5.2. *Sei $f : X \rightarrow Y$ etale, \mathcal{F} eine Garbe von abelschen Gruppen auf X . Dann $f_!(\mathcal{F})$ die Garbifizierung von*

$$V \mapsto \bigoplus_{\phi \in \text{Mor}_Y(V, X)} \mathcal{F}(\phi)$$

die direktes Bild mit eigentlichem Träger.

Da X und V etale über Y sind, ist auch ϕ etale über X .

Beispiel. Ist $f = j$ eine offene Immersion, $\psi : V \rightarrow Y$ etale, so ist

$$\text{Mor}_Y(V, X) = \begin{cases} \psi & \text{Im}(\psi) \subset X \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

Es ist also $f_! = j_!$ die Ausdehnung durch 0.

Übungsaufgabe 5.1. Sei Λ ein Ring, $f : X \rightarrow Y$ etale. Dann gilt

$$f_! \Lambda = (\tilde{X})^\Lambda$$

in der Notation aus Kapitel 1.

Lemma 5.3. Sei $f : X \rightarrow Y$ etale.

(i) Der Funktor $f_!$ ist linksadjungiert zu f^* , d.h.

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, f^* \mathcal{G}) = \text{Hom}(f_! \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

für alle Garben \mathcal{F} auf X und \mathcal{G} auf Y .

(ii) Ist $g : Y \rightarrow Z$ ebenfalls etale, so gilt

$$(gf)_! = g_! f_!$$

(iii) $f_!$ ist verträglich mit Basiswechsel. Ist $g : Z \rightarrow Y$ ein beliebiger Morphismus,

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{f'} & Z \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

so gibt es einen natürlichen Basiswechselisomorphismus

$$g^*(f_! \mathcal{F}) \cong f'_!(g'^* \mathcal{F})$$

für alle ableschen Garben auf X .

(iv) Sei $\bar{y} : \text{Spec } \kappa \rightarrow Y$ ein geometrischer Punkt und $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ die geometrischen Punkte von X über \bar{x} . Dann ist

$$(f_! \mathcal{F})_{\bar{x}} \cong \prod_{\nu=1}^r \mathcal{F}_{\bar{x}_\nu}$$

Insbesondere ist $f_!$ exakt und vertauscht mit direkten Limiten.

(v) Sei \mathcal{F} konstruierbar. Dann ist auch $f_! \mathcal{F}$ konstruierbar.

Beweis: Sei $\phi : U \rightarrow X$ etale. Dann gilt

$$(f^*\mathcal{G})(U) = f^*\mathcal{G}(\phi) = \mathcal{G}(f \circ \phi)$$

Ein $h \in \text{Hom}(\mathcal{F}, f^*\mathcal{G})$ ist daher eine verträgliche Familie

$$h_\phi : \mathcal{F}(\phi) \rightarrow \mathcal{G}(f \circ \phi)$$

Andererseits ist ein Garbenhomomorphismus $f_!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ eindeutig festgelegt durch einen Prägarbenhomomorphismus auf

$$V \mapsto \bigoplus_{\phi \in \text{Mor}_Y(V, X)} \mathcal{F}(\phi)$$

für $q : V \rightarrow Y$ etale. Gegeben ein System von h_ϕ definieren wir durch

$$\sum s_\phi \mapsto \sum h_\phi(s_\phi)$$

eine solche Abbildung. Hieraus folgt leicht die Adjunktionseigenschaft. Funktorialität folgt aus der universellen Eigenschaft. Basiswechsel folgt mit Adjunktion und dem Basiswechselisomorphismus

$$f^*g_*\mathcal{F} \cong g'_*f'^*\mathcal{F}$$

für die etale Abbildung f .

Die Aussage über geometrische Punkte folgt aus der Basiswechseleigenschaft. Die Konstruierbarkeitsaussage folgt mit ähnlichen Argumenten wie die von $f_!\Lambda$ in Kapitel 1. \square

Lemma 5.4. *Sei $f : X \rightarrow Y$ etale. Dann gibt es natürliche Transformation*

$$f_!\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{F}$$

Beweis: Äquivalent hierzu ist ein Homomorphismus

$$\mathcal{F} \rightarrow f^*f_*\mathcal{F} = f_*\mathcal{F}|_X$$

Sei $\phi : U \rightarrow Y$ etale. Dann ist $U \rightarrow U \times_Y U$ eine abgeschlossene Immersion (Separiertheit) und etale, da U und $U \times_Y U$ etale über Y sind. Es ist also ein Isomorphismus mit einem offenen und abgeschlossenen Unterschema. Jedem Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ ordnen wir den Schnitt

$$s' \in (f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \times_Y U)$$

zu, der auf U mit s übereinstimmt und überall sonst verschwindet. \square

Übungsaufgabe 5.2. Die Abbildung ist injektiv. Es gilt $f_!\mathcal{F}(U) \subset f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \times_Y X)$ sind die Schnitte deren Träger eigentlich über U ist.

Wir betrachten eine Faktorisierung $f = jg$ mit einer offenen Immersion $j : X \rightarrow \bar{X}$ und einem endlichen Morphismus $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow Y$. Sie existiert nach Zariskis Hauptsatz. Analog zum Beweis des Lemmas konstruieren wir eine natürliche Transformation

$$f_! \mathcal{F} \rightarrow \bar{f}_* j_! \mathcal{F}$$

Satz 5.5.

$$f_! \mathcal{F} \rightarrow \bar{f}_* j_! \mathcal{F}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Wir kennen die Halme beider Seiten und sie stimmen überein. \square

Dies benutzen wir, um $f_!$ nun auch für allgemeinere Morphismen zu definieren.

Definition 5.6. Sei $f : X \rightarrow S$ ein Morphismus. f heißt kompaktifizierbar, wenn es eine Faktorisierung $f = \bar{f}j$ gibt mit $j : X \rightarrow \bar{X}$ eine offene Immersion und $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow S$ eigentlich.

In diesem Fall definieren wir

$$R^i f_! \mathcal{F} = j_! R^i \bar{f}_* \mathcal{F}$$

das direkte Bild mit kompaktem Träger.

Beispiel. Sei X quasi-projektiv. Dann faktorisiert f über einen projektiven Raum, ist also kompaktifizierbar.

Bemerkung. Ist \mathcal{F}^\bullet ein Komplex von abelschen Garben, so ist setzen wir

$$Rf_! \mathcal{F}^\bullet = j_! R\bar{f}_* \mathcal{F}^\bullet$$

Die Funktoren $R^i f_!$ bilden nach Konstruktion einen δ -Funktorkomplex, erfüllen aber keine universelle Eigenschaft.

Übungsaufgabe 5.3. Sei $f : X \rightarrow S$ ein kompaktifizierbarer Morphismus von analytischen Räumen. Dann ist $f_! \mathcal{F}(U) \subset f_* \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \times_S X)$ die Menge der Schnitte, deren Träger eigentlich über U ist.

Lemma 5.7 ([FK]. 8.6) $R^i f_!$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Kompaktifizierung.

Definition 5.8. Sei $X \rightarrow \text{Spec } k$ kompaktifizierbar. Dann heißt

$$H_c^i(\bar{X}, \mathcal{F}) = R^i f_! \mathcal{F}$$

Kohomologie mit kompaktem Träger.

Theorem 5.9. (i) Sei

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{f'} & T \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

mit kompaktifizierbarem f (und dann auch f'). Dann gibt es einen natürlichen Basiswechselquasi-Isomorphismus

$$g^* Rf_! \mathcal{F}^\bullet \rightarrow Rf'_! g'^* \mathcal{F}^\bullet$$

auf Komplexen von Torsionsgarben.

(ii) Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ kompaktifizierbar, so gilt

$$R(gf)_! = Rg_! Rf_!$$

Beweis: Die erste Eigenschaft folgt aus eigentlichem Basiswechsel. Die zweite ist ein Spezialfall der Wohldefiniertheit. \square

Satz 5.10 (Exakte Kohomologiesequenz). Sei $f : X \rightarrow S$ kompaktifizierbar, $j : U \subset X$ offen mit abgeschlossenem Komplement $i : Z \rightarrow X$. Für Torsionsgarben \mathcal{F} gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow R^i(fj)_! \mathcal{F}|_U \rightarrow R^i f_! \mathcal{F} \rightarrow R^i(fi)_* \mathcal{F} \rightarrow R^{i+1}(fj)_! \mathcal{F}|_U \rightarrow \cdots$$

Beweis: Die Sequenz

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

ist exakt, denn für Punkte in U stimmen die Halme von \mathcal{F} und $j_! \mathcal{F}$ überein und für Punkte in Z die von \mathcal{F} und $i_* i^* \mathcal{F}$. Auf diese Sequenz wenden wir $Rf_!$ an. Wir erhalten

$$Rf_! \circ j_! = R(f \circ j)_! \quad Rf_! \circ i_* = Rf_! \circ i_! = R(f \circ i)_!$$

\square

Im Spezialfall $S = \text{Spec } k$ erhält man:

Korollar 5.11. Sei X/k quasi-projektiv, $U \subset X$ offen mit abgeschlossenem Komplement Z . Dann gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_c^i(\bar{U}, \mathcal{F}|_U) \rightarrow H_c^i(\bar{X}, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^i(\bar{Z}, \mathcal{F}|_Z) \rightarrow H_c^{i+1}(\bar{U}, \mathcal{F}|_U) \rightarrow \cdots$$

Übungsaufgabe 5.4. Sei C eine glatte Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, n teilerfremd zur Charakteristik. Berechnen Sie $H_c^i(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Hauptsätze

Satz 5.12 (kohomologische Dimension). Sei $f : X \rightarrow S$ kompaktifizierbar, \mathcal{F} eine Torsionsgarbe auf X . Sei d das Maximum der Faserdimensionen von X/S . Dann gilt

$$R^\nu f_! \mathcal{F} = 0 \quad \nu > 2d$$

Beweis: Wegen Basiswechsel für $f_!$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass S nur aus einem geometrischen Punkt besteht. Wegen noetherscher Induktion und der langen exakten Sequenz aus Satz 5.10 genügt es anzunehmen, dass X affin ist. Wegen Noether Normalisierung gibt es eine endliche Abbildung $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^d$. $\pi_* = \pi_!$ ist exakt. Es genügt die Behauptung für $X = \mathbb{A}^d$ zu beweisen. Durch Projektion $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ können wir f in eine Folge von relativen affinen Kurven faktorisieren. Es genügt, die Aussage für jede dieser Kurven einzeln zu beweisen, d.h. ohne Einschränkung ist $d \leq 1$. Sei $X \xrightarrow{j} \bar{X} \rightarrow \text{Spec } \kappa$ eine Kompaktifizierung. $j_!$ ist exakt. Mit Leray Spectralsequenz (Theorem 5.9 (ii)) genügt es, die Aussage für \bar{X} zu beweisen. Dann ist $f_! = f_*$ und die Behauptung folgt aus dem Kurvenfall, Satz 2.7. \square

Übungsaufgabe 5.5. Berechnen Sie $H_c^i(\mathbb{A}^n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ und $H_c^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ für algebraisch abgeschlossenen Grundkörper und n teilerfremd zur Charakteristik.

Bemerkung. Für affine Morphismen ist die kohomologische Dimension sogar d , dies ist aber nicht mit so einfachen Argumenten zu beweisen. Das Resultat wird auch "Schwacher Lefschetz" genannt.

Korollar 5.13. Sei \mathcal{F}^\bullet ein beschränkter Komplex von Torsionsgarben auf X . Dann ist $Rf_!\mathcal{F}^\bullet$ ein Komplex mit beschränkter Kohomologie, d.h. $H^i(Rf_!\mathcal{F}^\bullet) \neq 0$ nur für endlich viele i .

Beweis: Spektralsequenz zur kanonischen oder dummen Filtrierung oder mit vollständiger Induktion über die Länge des Komplexes. \square

Theorem 5.14 (Konstruierbarkeit). Sei $f : X \rightarrow S$ kompaktifizierbar.

Beweis: Wir wiederholen die Argumente aus dem Beweis aus dem Beweis von Satz 5.12. Wieder geht alles gut, da $j_!$ Konstruierbarkeit erhält und nach Satz 2.11 die Behauptung für vollständige Kurven gilt. \square

Korollar 5.15. Sei \mathcal{F}^\bullet ein nach unten beschränkter Komplex von Torsionsgarben mit $H^i(\mathcal{F}^\bullet)$ konstruierbar. Dann hat $Rf_!\mathcal{F}^\bullet$ ebenfalls konstruierbare Kohomologiegarben.

Beweis: Wieder Spektralsequenz oder Induktion über die Länge des Komplexes. \square

Korollar 5.16. Sei X/k eine quasi-projektive Varietät, \mathcal{F} konstruierbar. Dann ist $H_c^i(\bar{X}, \mathcal{F})$ endlich.

Beweis: $f : X \rightarrow \text{Spec } k$ ist kompaktifizierbar und eine konstruierbare Garbe auf $\text{Spec } k$ ist eine endliche Gruppe mit Operation der Galoisgruppe. \square

Satz 5.17. Sei $f : X \rightarrow S$ glatt und eigentlich, \mathcal{F} eine endlich lokal-konstante Garbe auf X . Dann ist $R^i f_* \mathcal{F}$ endlich lokal-konstant auf X .

Bemerkung. Besonders interessant ist $S = \text{Spec } \mathbb{Z}_p$. Dann lässt sich die generische Faser \mathbb{Q}_p nach \mathbb{C} einbetten, wo sich étale Kohomologie mit singulärer Kohomologie vergleichen lässt. Andererseits ist die spezielle Faser $\text{Spec } \mathbb{F}_p$ und wir haben es mit Kohomologie von Varietäten in Charakteristik p zu tun.

Beweis: Nach Theorem 5.14 sind die $R^i f_* \mathcal{F} = R^i f_! \mathcal{F}$ alle konstruierbar. Zu zeigen ist nun, dass alle Spezialisierungsabbildungen Isomorphismen auf Halmen von $R^i f_* \mathbb{F}$ sind. Hierfür können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \text{Spec } A$ mit A strikt henselsch. Sei s der spezielle Punkt von A , η der generische, $\bar{\eta}$ ein geometrischer Punkt über η . Nach eigentlichem Basiswechsel gilt

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(X_s, \mathcal{F}_s)$$

Zu zeigen ist also, dass

$$H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{\bar{\eta}})$$

ein Isomorphismus ist. Die Abbildung wird induziert von $j : X_{\bar{\eta}} \rightarrow X$. Sei komplementär $i : X_s \rightarrow X$.

Behauptung. $i^* \mathcal{F} \rightarrow i^* Rj_* j^* \mathcal{F}$ ist ein Quasi-Isomorphismus.

Die Behauptung wird ohne die Voraussetzung bewiesen, dass f eigentlich ist. Die Aussage ist lokal bezüglich der étalen Topologie auf X , daher können wir annehmen, dass $\mathcal{F} = M_X$ konstant ist mit M eine endliche abelsche Gruppe. Mit anderen Worten, $\mathcal{F} = f^* M$ bezüglich einer (konstanten) Garbe auf $\text{Spec } A$. Wir benutzen glatten Basiswechsel für das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{j_A} & \text{Spec } A \end{array}$$

Es genügt daher, die Behauptung für $f = \text{id}$ und $\mathcal{F} = M$ zu zeigen. In dieser Situation ist $i^* = \Gamma(X, \cdot)$ und

$$i^* j_* \mathcal{G} = \Gamma(X, j_* \mathcal{G}) = \Gamma(\bar{\eta}, \mathcal{G})$$

Da $\bar{\eta}$ separabel abgeschlossen ist, ist dies ein exakter Funktor, also $i^* j_* = i^* Rj_*$. Angewendet auf $j^* M$ erhalten wir die Behauptung.

Sei nun wieder f glatt eigentlich. Es gilt

$$\begin{aligned} H^\nu(X, \mathcal{F}) &= H^\nu(X_s, i^* \mathcal{F}) = H^\nu(X_s, i^* Rj_* j^* \mathcal{F}) \\ &= H^\nu(X, Rj_* j^* \mathcal{F}) = H^\nu(X_{\bar{\eta}}, j^* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

wie gewünscht. \square

Bemerkung. Wir kennen nun f^* , f_* und $f_!$. Von f^* und $f_!$ wissen wir, dass konstruierbare Garben auf konstruierbare abbilden. Die Familie wird komplettiert durch $Rf^!$, den Linksadjungierten von $Rf_!$. Wir werden ihn nicht studieren können.

Korollar 5.18. *Sei $f : X \rightarrow S$ eigentlich mit maximaler Faserdimension d . Dann hat f_* die kohomologische Dimension $2d$.*

Kapitel 6

Cup-Produkte und Künnethformel

Die Kategorie der abelschen Garben hat ein Tensorprodukt, definiert als Garbifizierung des Prägarbentensorproduktes. Da Tensorprodukte mit direkten Limiten vertauschen, erhält man auf Halmen das Tensorprodukt der Halme.

Lemma 6.1. *Sei Λ ein Ring, $\mathcal{F} \otimes_{\Lambda} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Morphismus von Λ -Modulgarben auf X . Dann erhalten wir natürliche Abbildungen*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \times H^j(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{i+j}(X, \mathcal{H})$$

Ist $f : X \rightarrow X$ ein (kompaktifizierbarer) Morphismus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} R^i f_* \mathcal{F} \otimes R^j f_* \mathcal{G} &\rightarrow R^{i+j} f_* \mathcal{H} \\ R^i f_! \mathcal{F} \otimes R^j f_! \mathcal{G} &\rightarrow R^{i+j} f_! \mathcal{H} \end{aligned}$$

Wir nennen diese Paarungen *Cup-Produkt*.

Beweis: Sei I^* eine injektive Auflösung von \mathcal{F} . Sei J^* eine injektive Auflösung von \mathcal{G} . Dann ist $I^* \otimes J^*$ ein Doppelkomplex. Sei K^* der assoziierte Totalkomplex. Er ist eine Auflösung von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Sei \tilde{K}^* eine injektive Auflösung von K^* , also eine von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Wir erhalten induzierte Komplexhomomorphismen

$$I^*(X) \otimes J^*(X) \rightarrow K^*(X) \rightarrow \tilde{K}^*(X)$$

Wir erhalten daher Abbildungen auf Kohomologieniveau

$$H^i(I^*(X)) \otimes H^j(J^*(X)) \rightarrow H^{i+j}(K^*(X)) \rightarrow H^{i+j}(\tilde{K}^*(X))$$

Die erste Gruppe ist $H^i(X, \mathcal{F}) \otimes H^j(X, \mathcal{G})$, die letzte $H^{i+j}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$. Aus Funktorialität erhalten wir eine Abbildung nach $H^{i+j}(X, \mathcal{H})$.

Die Argumentation für Rf_* ist identisch. Sei zuletzt $f : X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} S$ eine Kompaktifizierung von f . Es gilt $j_! \mathcal{F} \otimes j_! \mathcal{G} = j_!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ (halmweise überprüfen). Die Behauptung für $Rf_!$ folgt aus der für $R\bar{f}_*$. \square

Übungsaufgabe 6.1. Sei E/k eine elliptische Kurve. Sei $E[n]$ der Kern Multiplikation mit n , n teilerfremd zur Charakteristik von k .

(i) $H^1(\overline{E}, \mu_n) = E[n]$ als etale Garben auf k .

(ii) $H^2(\overline{E}, \mu_n) = \mu^n$

(iii) Die Cup-Produktpaarung

$$H^1(\overline{E}, \mu_n) \times H^1(\overline{E}, \mu^n) \rightarrow H^2(\overline{E}, \mu_n^{\otimes 2})$$

identifiziert sich mit der Weil-Paarung (vergleiche Silverman, Arithmetic of elliptic curves).

Unser nächstes Ziel ist die Projektionsformel über die Verträglichkeit von Tensorprodukt und $f_!$. Dafür brauchen wir eine derivierte Version von Tensorprodukt.

Definition 6.2. Sei Λ ein Ring. Eine Garbe heißt Λ -flach, wenn alle Halme Λ -flach sind.

Lemma 6.3. Die Kategorie der Λ -Modulgarben hat genügend viele Λ -flache, d.h. für jede Garbe \mathcal{F} gibt es eine Surjektion $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ mit \mathcal{G} eine Λ -flache Garbe.

Beweis: Wir wählen $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\Lambda$, d.h. wir fassen \mathcal{F} als Garbe von Mengen auf und gehen zur assoziierten Modulgarbe über. Offensichtlich ist die Abbildung surjektiv. Die Halme von \mathcal{F}^Λ sind frei, also flach. \square

Definition 6.4. Sei \mathcal{F} eine Garbe von Λ -Moduln auf X , $P^\bullet \rightarrow \mathcal{F}$ eine Linksauflösung durch Λ -flache Modulgarben. Wir setzen

$$\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{G} = P^\bullet \otimes \mathcal{G}$$

in der derivierten Kategorie von Λ -Modulgarben.

Übungsaufgabe 6.2. Sei \mathcal{F}, \mathcal{G} wie in der Definition, \bar{x} ein geometrischer Punkt von x . Dann ist

$$H^i(\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{G})_{\bar{x}} = \mathrm{Tor}_{-i}(\mathbb{F}_{\bar{x}}, \mathcal{G}_{\bar{x}})$$

Bemerkung. Die Definition setzt sich in offensichtlicher Weise auf nach oben beschränkte Komplexe \mathcal{F}^\bullet und \mathcal{G}^\bullet aus. Wir wollen dies mit $Rf_!$ mischen, welches für nach unten beschränkte Komplexe definiert ist. Wir wissen aber bereits, dass $Rf_!$ Beschänktheit von Komplexen erhält, daher lässt es sich ausdehnen auf beliebige Komplexe. Wir werden diese Probleme einfach ignorieren.

Satz 6.5 (Projektionsformel). Sei $f : X \rightarrow S$ kompaktifizierbar, \mathcal{F}^\bullet ein nach oben beschränkter Komplex von Λ -Modulgarben auf S , \mathcal{G}^\bullet ein ebensolcher auf X . Dann gibt es einen natürlichen Quasi-Isomorphismus

$$\mathcal{F}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}} Rf_! \mathcal{G}^\bullet \cong Rf_!(f^* \mathcal{F}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{G}^\bullet)$$

Bemerkung. Hieraus kann man umgekehrt eigentlichen Basiswechsel herleiten.

Beweis: Es genügt die Fälle offene Immersion und eigentlicher Morphismus separat zu behandeln. Sei also $j : X \rightarrow S$ eine offene Immersion, \mathcal{F} sei Λ -flach. Dann ist auch $j^*\mathcal{F}$ eine Λ -flache Garbe. Es folgt

$$\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} j_!\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes j_!\mathcal{G} = j_!(j^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = j_!(j^*\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{G})$$

wie man durch Überprüfen der Halme sieht.

Sei ab jetzt $f : X \rightarrow S$ eigentlich. Es genügt, die Aussage für einzelne Garben zu beweisen, wobei wir \mathcal{F} als Λ -flach wählen und \mathcal{G} als f_* -azyklisch (z.B. injektiv). Wir konstruieren zunächst die Abbildung. Adjunktion für f_* induziert

$$f^*f_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

Wegen Verträglichkeit von f^* mit Tensorprodukt wird hieraus

$$f^*(\mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{G}) = f^*\mathcal{F} \otimes f^*f_*\mathcal{G} \rightarrow f^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$$

Die gesuchte Abbildung entsteht hieraus durch Adjunktion

$$\mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{G} \rightarrow f_*(f^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

Diese Abbildung ist natürlich und dehnt sich auf Komplexe aus. Wegen der Λ -Flachheit ist die linke Seite gleich dem derivierten Tensorprodukt. Da f^* diese Eigenschaft erhält, gilt es auch rechts.

Die Behauptung ist also, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist. Wir überprüfen dies halmweise, also nach Basiswechsel zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper κ . Wegen eigentlichem Basiswechsel genügt es die Behauptung im Spezialfall $S = \text{Spec } \kappa$ zu zeigen. Dann ist $\mathcal{F} = M$ für einen flachen Λ -Modul M . Wir betrachten

$$M \otimes H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, f^*M \otimes \mathcal{G})$$

Da $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lokal und artinsch ist, ist M automatisch frei (Matsumura Commutative Ring theory Thm. 22.3 und nachfolgende Bemerkung). Da H^0 mit direkten Summen vertauscht, folgt die Behauptung. \square

Übungsaufgabe 6.3. Sei $f : X \rightarrow S$ so, dass f_* endliche kohomologische Dimension hat. $\mathcal{F} = M_S$ eine lokal-konstante Garbe auf S , \mathcal{G} wie im Satz. Dann gibt es einen Quasi-Isomorphismus

$$M_S \otimes^{\mathbb{L}} Rf_*\mathcal{G}^\bullet \cong Rf_*(M_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{G}^\bullet)$$

Korollar 6.6. Sei X/k eine quasi-projektive Varietät, n teilerfremd zu Charakteristik 0, \mathcal{F} eine $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modulgarbe auf X . Dann gilt

$$H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F} \otimes \mu_n) \cong H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F}) \otimes \mu_n$$

Insbesondere gibt es eine Bijektion zwischen den zugrundeliegenden abelschen Gruppen von $H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F} \otimes \mu_n)$ und $H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F})$.

Der Funktor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes \mu_n$ heißt *Tate-Twist*.

Beweis: Projektionsformel für die lokal-konstante Garbe μ_n und den Strukturmorphismus $X \rightarrow \text{Spec } k$. Da μ_n eine Λ -flache Garbe ist, stimmen \otimes und $\otimes^{\mathbb{L}}$ überein. \square

l -adische Garben

Wir betrachten nun $\Lambda = \mathbb{Z}/l^{n+1}$ mit l eine Primzahl verschieden von der Charakteristik der beteiligten Schemate.

Korollar 6.7. *Sei l eine Primzahl teilerfremd zur Charakteristik, $f : X \rightarrow S$ kompaktifizierbar, \mathcal{G}^\bullet ein Komplex \mathbb{Z}/l^{n+1} -Modulgarbe auf X . Dann gilt*

$$Rf_!(\mathcal{G}^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/l^{n+1}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/l^n) \cong Rf_!(\mathcal{G}^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}/l^{n+1}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/l^n$$

Definition 6.8. *Sei X Schema, l eine Primzahl ungleich der Charakteristik von X . Ein strikt l -adischer Komplex ist ein System $(\mathcal{G}_n^\bullet)_{n \geq 0}$ von Komplexen Torsionsgarben auf X , so dass*

- (i) $H^i(\mathcal{G}^\bullet) = (H^i(\mathcal{G}_n^\bullet))_n$ verschwindet für fast alle i .
- (ii) \mathcal{G}_n^\bullet ist ein nach oben beschränkter Komplex von \mathbb{Z}/l^{n+1} -Modulgarben mit konstruierbaren Kohomologiegarben und so dass alle bis auf endliche viele Kohomologiegarben AR-äquivalent zu 0 sind.
- (iii) Die natürliche Abbildung

$$\mathcal{G}_n^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/l^{n+1}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/l^n \rightarrow \mathcal{G}_{n-1}^\bullet$$

ist ein Quasi-Isomorphismus.

Lemma 6.9. *Sei $f : X \rightarrow S$ kompaktifizierbar, $\mathcal{G}^\bullet = (\mathcal{G}_n^\bullet)$ ein strikter l -adischer Komplex auf X . Dann ist $Rf_!\mathcal{G}^\bullet = (Rf_!\mathcal{G}_n^\bullet)$ ein strikter l -adischer Komplex auf S .*

Beweis: Alle $Rf_!\mathcal{G}_n^\bullet$ können nach oben beschränkt gewählt werden. Sie sind haben konstruierbare Kohomologie. Die Kohomologie von $Rf_!\mathcal{G}^\bullet$ ist in endlich vielen Graden konzentriert. Nach Korollar 6.7 ist auch $Rf_!\mathcal{G}^\bullet$ strikt verträglich mit $\otimes^{\mathbb{L}}$. \square

Lemma 6.10. *Sei \mathcal{G}^\bullet ein strikter l -adischer Komplex. Dann sind alle $H^i(\mathcal{G}^\bullet)$ AR-isomorph zu strikten l -adischen Garben.*

Beweis: Wir argumentieren mit Induktion über die Länge des Inveralls, in dem $H^i(\mathcal{G}^\bullet)$ nicht AR-null ist. Sei i_0 das Maximum der Indices für die das Kohomoliesystem nicht verschwindet. Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts gilt

$$H^{i_0}(\mathcal{G}_n^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}/l^{n+1}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/l^n) = H^{i_0}(\mathcal{G}_n) \otimes \mathbb{Z}/l^n$$

Daher ist $H^{i_0}(\mathcal{G}^\bullet)$ strikt l -adisch.

Behauptung. *Es gibt einen strikten l -adischen Komplex \mathcal{H}^\bullet , dessen Kohomologie im Grad i_0 mit $H^{i_0}(\mathcal{G}^\bullet)$ übereinstimmt, in höheren Graden verschwindet und in kleineren Graden AR-null ist.*

Sei ohne Einschränkung $i_0 = 0$. Wir betrachten der Einfachheit halber die Situation, dass $\mathcal{H}^i = H^0(\mathcal{G}^\bullet)$ glatt ist, d.h. auf endlicher Stufe endlich lokal-konstant. Dies ist eine Darstellung der Fundamentalgruppe. Wir bilden $\varprojlim \mathcal{H}_n$ in der Kategorie der Darstellungen definieren dann

$$\mathcal{H}_m = (\varprojlim \mathcal{H}_n) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}/l^{m+1}$$

Dieses System von Komplexen von Darstellungen, bzw. von lokal-konstanten Garben hat die gewünschte Eigenschaft. Für allgemeine strikt l -adische Garben muss diese Konstruktion auf den Straten ausgeführt und dann verklebt werden. Zusätzlich gibt es eine natürliche Abbildung (etwas mühsam aus der universellen Eigenschaft von $\otimes^{\mathbb{L}}$) $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$.

Wir gehen nun zum Kegel $\text{cone}(\phi)$ über. Er hat nicht-triviale Kohomologie in einem echt kleineren Kohomologieintervall. Mit vollständiger Induktion reduzieren wir uns auf einen strikt l -adischen Komplex, dessen Kohomologie AR-null ist. Insbesondere ist die Kohomologie dann l -adisch. \square

Bemerkung. Der nächste logische Schritt wäre eine Entwicklung des Begriffs von l -adischen Komplexen und deren Kohomologie. Das ist geht (Jannsen unveröffentlicht, Ekedahl On the adic formalism. The Grothendieck Festschrift, Vol. II.), ist aber sehr aufwendig. Im für uns wichtigsten Fall, für Varitäten über endlichen Körpern, funktioniert die naive Definition:

$$D_c^b(X, \mathbb{Z}_l) := \varprojlim D_c^b(X, \mathbb{Z}/l^n)$$

wobei $D_c^b(X, \mathbb{Z}/l^n)$ die beschränkte derivierte Kategorie der konstruierbaren \mathbb{Z}/l^n -Modulgarben ist. l -adische Komplexe sind hierin diejenigen mit $H^i(\mathcal{G}^\bullet)$ l -adische Garbe. Wir sind im Folgenden weniger ehrgeizig.

Korollar 6.11. *Sei $f : X \rightarrow S$ kompaktifizierbar. $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_n$ eine l -adische Garbe auf X . Dann sind alle $R^i f_! \mathcal{G} = R^i f_! (\mathcal{G}_n)_n$ ebenfalls l -adische Garben auf S .*

Beweis: Wie im Beweis des Lemmas ersetzen wir \mathcal{G} durch einen strikt l -adischen Komplex, dessen Kohomologie (aufgefasst als l -adische Garben) nur im Grad 0 konzentriert ist. Nun wenden wir erst Lemma 6.9 und dann Lemma 6.10 an. \square

Als Spezialfall:

Korollar 6.12. *Sei X/k quasi-projektiv, \mathcal{F} eine l -adische Garbe auf X . Dann ist*

$$H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F})$$

endlich erzeugter \mathbb{Z}_l -Modul mit Operation von $\text{Gal}(\overline{k}/k)$.

Wir hatten die Noation $\mathbb{Z}_l(1) = (\mu_{l^{n+1}})_n$ und allgemeiner $\mathbb{Z}_l(j) = \mathbb{Z}_l(1)^{\otimes j}$ bereits eingeführt.

Definition 6.13. Sei X/k quasi-projektiv. Dann setzen wir

$$H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(j)) = H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(j)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

die l -adische Kohomologie von \overline{X} mit kompaktem Träger.

Dies sind endlich dimensionale \mathbb{Q}_l -Vektorräume. Wir erhalten so eine bigraduierte Kohomologietheorie. Es gilt nach Korollar 6.6

$$H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(j)) \otimes \mathbb{Q}_l(j') \cong H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(j+j'))$$

Beispiel. Es gilt

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_l) = \mathbb{Q}_l \quad H^2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}_l) = \mathbb{Q}_l(-1)$$

Bemerkung. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist $\mathbb{Z}_l(1) \cong \mathbb{Z}_l$ und die Bigraduierung fällt nicht auf. Dennoch kann man den Twist auch in der topologischen Situation sehen: Beim Vergleich von de Rham-Kohomologie und singuläre Kohomologie tritt bei $H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})$ ein Faktor $2\pi i$ auf, eine andere Inkarnation des Tate-Twists.

Künnthformel

Sei $f : X \rightarrow \text{Spec } k$ quasiprojektiv. Wir schreiben

$$R\Gamma_c(\overline{X}, \mathcal{F}) := Rf_* \mathcal{F}$$

Satz 6.14. Seien $X, Y/k$ quasiprojektiv, \mathcal{F} eine konstruierbare Garbe auf X , \mathcal{G} eine konstruierbare Garbe auf Y . Dann gilt

$$R\Gamma_c(\overline{X \times Y}, p_X^* \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} p_Y^* \mathcal{G}) = R\Gamma_c(\overline{X}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}} R\Gamma_c(\overline{Y}, \mathcal{G})$$

Beweis: Projektionsformel für $p_X : X \times Y \rightarrow Y$ und $Y \rightarrow \text{Spec } k$. \square

Korollar 6.15. Seien $X, Y/k$ quasiprojektiv, l verschieden von $\text{Char } k$. Dann gilt

$$R\Gamma_c(\overline{X \times Y}, \mathbb{Z}_l) = R\Gamma_c(\overline{X}, \mathbb{Z}_l) \otimes^{\mathbb{L}} R\Gamma_c(\overline{Y}, \mathbb{Z}_l)$$

und

$$H_c^n(\overline{X \times Y}, \mathbb{Q}_l) = \bigoplus_{i+j=n} H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes H_c^j(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l)$$

Theorem 6.16 (Poincaré Dualität). Sei X glatt von Dimension d . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H_c^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(d)) \rightarrow \mathbb{Z}_l$$

Für jede glatte \mathbb{Z}_l -Garbe \mathcal{F} mit freien Halmen auf X ist die Paarung

$$H_c^r(\overline{X}, \mathcal{F}) \times H^{2d-r}(X, \mathcal{F}^\vee(d)) \rightarrow H_c^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(d)) \cong \mathbb{Z}_l$$

nicht-ausgartet.

Übungsaufgabe 6.4. Der Isomorphismus ist eindeutig charakterisiert durch Natürlichkeit, Verträglichkeit mit Künnethformel und den Fall \mathbb{P}^1 .

Kapitel 7

Frobenius und die Rationalität der Zeta-Funktion

In diesem Kapitel sei stets $k = \mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen. Sei p die Charakteristik von k und l eine von p verschiedene Primzahl.

Wir erinnern uns: Für jede Varietät X ist

$$Z(X, t) = \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^r})| \frac{t^r}{r} \right)$$

Unser Ziel ist zu zeigen, dass $Z(X, t)$ eine rationale Funktion ist.

Lemma 7.1. $\mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}[[t]] \cap \mathbb{Q}_l(t)$

Beweis: Sei $f(t) = \sum_r a_r t^r \in K[[t]]$ eine Potenzreihe. Wir benutzen das folgende Rationalitätskriterium:

Behauptung. $f(t)$ ist Potenzreihenentwicklung von $f \in K(t)$ genau dann, wenn es $N, M > 0$ gibt mit

$$\det(a_{i+j+k})_{0 \leq i, j \leq M} = 0 \quad \text{für alle } k \geq N$$

Ist also $f \in \mathbb{Q}[[t]] \cap \mathbb{Q}_l(t)$ so ist das Kriterium über \mathbb{Q}_l erfüllt. Da die Determinanten in \mathbb{Q} liegen, ist es dann bereits in \mathbb{Q} erfüllt und die Funktion ist rational. \square

Übungsaufgabe 7.1. Beweisen Sie die Behauptung. Es handelt sich übrigens um Hankel-Determinanten.

Wir arbeiten daher ab jetzt mit \mathbb{Q}_l -Koeffizienten.

Lemma 7.2. Sei X eine Varietät über \mathbb{F}_q . Es gilt

$$Z(X, t) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}}$$

wobei X_0 die Menge der abgeschlossenen Punkte von X ist und $\deg x = [\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$. Insbesondere ist $Z(X, t) \in \mathbb{Z}[[t]]$.

Beweis: Wir logarithmieren und erhalten die Behauptung

$$\sum_{r=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^r})| \frac{t^r}{r} = \sum_{x \in X_0} -\log(1 - t^{\deg(x)})^{-1}$$

Der Summand zu x ist gegeben durch

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^{r \deg(x)}}{r} = \sum_{r=1}^{\infty} \deg(x) \frac{t^{\deg(x)r}}{\deg(x)r}$$

Andererseits trägt x zu den Elementen von $X(\mathbb{F}_{q^r})$ bei, bei denen $\text{Spec } \mathbb{F}_{q^r} \rightarrow X$ über den Punkt x faktorisiert. Wegen

$$|\text{Mor}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^{\deg(x)}}, \mathbb{F}_{q^r})| = \begin{cases} 0 & d \nmid r \\ \deg(x) & \deg(x) | r \end{cases}$$

ist das genau dann der Fall, wenn $\deg(x) | r$ und dann genau mit der richtigen Vielfachheit. \square

Die Galoistheorie von Erweiterungen von \mathbb{F}_q wird völlig von Frobenius beherrscht.

Definition 7.3. Der arithmetische Frobenius $\Phi = \Phi_q \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{F}_q)$ ist der Körperhomomorphismus $a \mapsto a^q$.

Es gilt dann automatisch $\Phi_{q^r} = \Phi_q^r$. Ist $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, so schreiben wir

$$\Phi_x = \Phi^{\deg(x)}$$

Definition 7.4. Sei \mathcal{F} eine \mathbb{Q}_l -Garbe auf $\text{Spec } \mathbb{F}_q$. Dann heißt

$$Z(X, t, \mathcal{F}) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{\det(1 - t^{\deg(x)} \Phi_x^{-1} | \mathcal{F}_{\bar{x}})} \in \mathbb{Q}_l[[t]]$$

L -Reihe für \mathcal{F} .

Bemerkung. Die Definition ist unabhängig von der Wahl des geometrischen Punkte über x .

Es ist nach Lemma 7.2

$$Z(X, t) = Z(X, t, \mathbb{Q}_l)$$

Theorem 7.5. Sei X/\mathbb{F}_q quasiprojektiv, \mathcal{F} eine konstruierbare \mathbb{Q}_l -Garbe auf X . Dann gilt

$$Z(X, t, \mathcal{F}) = \prod_{i=0}^{2 \dim X} \det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

Wir schreiben $\det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\overline{X}, \mathcal{F}))$ für die rechte Seite.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{P}^1$. Wir haben uns bereits früher überlegt, dass

$$Z(\mathbb{P}^1, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}$$

Es gilt

$$\det(1 - t\Phi^{-1}q|H^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_l)) = \det(1 - t\Phi^{-1}|\mathbb{Q}_l) = 1 - t$$

Weiter ist $H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_l) = \mathbb{Q}_l(-1)$, der duale Modul zu $\mathbb{Q}_l(1) = \mathbb{Q}_l \otimes \varprojlim \mu_{l^n}$. Auf diesem operiert Φ durch $x \mapsto x^q$, additiv geschrieben durch Multiplikation mit q . Auf $\mathbb{Q}_l(-1)$ operiert dann Φ durch Multiplikation mit q^{-1} und Φ^{-1} wieder durch q . D.h.

$$\det(1 - t\Phi^{-1}q|H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_l)) = \det(1 - t\Phi^{-1}|\mathbb{Q}_l) = 1 - tq$$

Lemma 7.6 (Rechenregeln). (i) (Multiplikatitivität in \mathcal{F}) Sei

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz auf X . Dann gilt

$$Z(X, t, \mathcal{F}) = Z(X, t, \mathcal{F}')Z(X, t, \mathcal{F}'')$$

und

$$\det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\overline{X}, \mathcal{F})) = \det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\overline{X}, \mathcal{F}')) \det(1 - t\Phi^{-1}t|H_c^*(\overline{X}, \mathcal{F}''))$$

(ii) (Multiplikatitivität in X) Sei $U \subset X$ offen mit abgeschlossenem Komplement Y . Dann gilt

$$Z(X, t, \mathcal{F}) = Z(U, t, \mathcal{F}|_U)Z(Y, t, \mathcal{F}|_Y)$$

und

$$\det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\overline{X}, \mathcal{F})) = \det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\overline{U}, \mathcal{F}|_U)) \det(1 - t\Phi^{-1}t|H_c^*(\overline{Y}, \mathcal{F}|_Y))$$

(iii) (Multiplikatitivität in Faserungen) Sei $f : X \rightarrow S$ ein Morphismus. Dann gilt

$$Z(X, t, \mathcal{F}) = \prod_{s \in S_0} Z(X_s, t, \mathcal{F})$$

und

$$\det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\overline{X}, \mathcal{F})) = \prod_j \det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\overline{S}, R^j f_* \mathcal{F}))^{(-1)^j}$$

Beweis: Wichtigste Zutat ist jeweils die Multiplikativität der Determinante in kurzen exakten Sequenzen. Hieraus folgt eine Multiplikationsregel für Determinanten in langen exakten Sequenzen. \square

Korollar 7.7. *Es genügt, Theorem 7.5 in der Situation zu beweisen, dass X eine glatte irreduzible Kurve ist und \mathcal{F} eine glatte Garbe auf X .*

Beweis: Wir argumentieren mit Induktion über die Dimension. Falls $\dim X = 0$, so kann die Aussage direkt verifiziert werden.

Sei $\dim X = 1$. Ohne Einschränkung können wir X durch seine Reduktion ersetzen. Auf einer offenen Teilmenge ist X dann glatt. Wegen der Multiplikativität in X können wir X durch diese offene Teilmenge ersetzen. \mathcal{F} ist auf einer offenen Teilmenge glatt, wieder ersetzen wir X durch diese Teilmenge. Dann gilt das Theorem nach Voraussetzung.

Sei nun $d = \dim X > 1$. Wir gehen mit der Multiplikativität in X zu einer affinen offenen Teilmenge über. Dann können wir $X \rightarrow \text{Spec } k$ faktorisieren über $f : X \rightarrow S$ mit $\dim S$ und Faserdimension $\leq d - 1$. Dann gilt nach Induktion und Basiswechsel

$$\begin{aligned} \det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\bar{X}, \mathcal{F})) &= \prod_j \det(1 - t\Phi^{-1}|H_c^*(\bar{S}, R^j f_! \mathcal{F})^{(-1)^j}) \\ &= \prod_j Z(S, t, R^j f_! \mathcal{F})^{(-1)^j} \\ &= \prod_j \prod_{s \in S_0} \det(1 - t\Phi_x^{-1}|(R^j f_! \mathcal{F})_{\bar{x}})^{(-1)^{j+1}} \\ &= \prod_{s \in S_0} \det(1 - t\Phi_x^{-1}|H_c^*(\bar{X}_s, \mathcal{F})) \\ &= \prod_{s \in S_0} Z(X_s, t, \mathcal{F}) = Z(X, t, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

\square

Der Beweis im Kurvenfall hat zwei Schritte: Ein Twistargument zur Reduktion auf den konstanten Fall, danach der konstante Fall mit Letschetz-Fixpunktformel für Frobenius. Wir beginnen mit letzterem.

Frobenius

Definition 7.8. *Sei A eine \mathbb{F}_q -Algebra. Dann heißt*

$$f_* : A \rightarrow A \quad a \mapsto a^q$$

und der induzierte Schemamorphismus

$$f : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A$$

absoluter Frobenius.

Der absolute Frobenius ist \mathbb{F}_q -linear und verträglich mit Lokalisierung, da $A_s = A_{s^q}$.

Lemma 7.9. *f ist ein Homöomorphismus.*

Beweis: Tatsächlich operiert f als Identität auf dem topologischen Raum. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Wir berechnen

$$f_*^{-1}(\mathfrak{p}) = \{s \in A \mid f_*(s) \in \mathfrak{p}\}$$

Wegen $f_*(s) = s^q$ und da \mathfrak{p} prim ist, folgt $s \in \mathfrak{p}$. □

Daher setzt sich die Definition des absoluten Frobenius fort auf alle \mathbb{F}_q -Schemata: Es der Morphismus, der lokal durch den absoluten Frobenius gegeben ist. Oder alternativ: Die Identität auf dem topologischen Raum und $a \mapsto a^q$ auf der Strukturgarben.

Definition 7.10. *Sei X/\mathbb{F}_q eine Varietät, k/\mathbb{F}_q eine Körpererweiterung. Dann heißt Der Basiswechsel von $f : X \rightarrow X$ nach k*

$$F : X \times_{\mathbb{F}_q} k \rightarrow X \times_{\mathbb{F}_q} k$$

geometrischer Frobenius. Für $k = \overline{\mathbb{F}_q}$ heißt der Basiswechsel von $\Phi : \overline{\mathbb{F}_q} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ nach $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$

$$\Phi : \overline{X} \rightarrow \overline{X}$$

arithmetischer Frobenius.

Bemerkung. Der geometrische Frobenius ist k -linear, Φ und f nicht. Letztere sind keine Morphismen von $\overline{\mathbb{F}_q}$ -Varietäten, nur Morphismen von Schemata.

Lemma 7.11. *Sei X/\mathbb{F}_q eine Varietät. Dann gilt*

$$\Phi \circ F = F \circ \Phi = f$$

Beweis: Wir gehen zur affinen Situation über. $X = \text{Spec } A$, $\overline{X} = \text{Spec } A \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$. Dann ist

$$\Phi(a \otimes \alpha) = a \otimes \alpha^q \quad F(a \otimes \alpha) = a^q \otimes \alpha$$

Die Komposition bildet $a \otimes \alpha$ ab auf $a^q \otimes \alpha^q = f(a \otimes \alpha)$. □

Beispiel. Sei $A = \mathbb{F}_q[X]$, also $\overline{A} = \overline{\mathbb{F}_q}[X]$.

$$\Phi\left(\sum a_i X^i\right) = \sum a_i^q X^i \quad F\left(\sum a_i X^i\right) = \sum a_i X^{iq}$$

Übungsaufgabe 7.2. Sei $V = V(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^n$. Dann operiert der geometrische Frobenius auf den $\overline{\mathbb{F}_q}$ -wertigen Punkten von V als

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^q, \dots, x_n^q)$$

Lemma 7.12. *Es gilt*

$$X(\mathbb{F}_{q^r}) = X(\overline{\mathbb{F}}_q)^{F^r}$$

Beweis: Es genügt, den affinen Fall zu betrachten. Dann hat ein Punkt genau dann Koordinaten in \mathbb{F}_{q^r} , wenn sie invariant unter $a \mapsto a^{q^r}$ sind. \square

Lemma 7.13. *Sei X/\mathbb{F}_q eine Varietät und \mathcal{F} eine étale Garbe auf X . Dann induzieren F und Φ Operationen auf $H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F})$. Sie sind invers zueinander. Die Operation von Φ stimmt mit der vorher mit Φ bezeichneten Operation von Frobenius auf der Garbe $H_c^i(\overline{X}, \mathcal{F})$ auf $\text{Spec } \mathbb{F}_q$ überein.*

Beweis: Beide Operationen benutzen die Funktorialität von H_c^i . Man beachte, dass F endlich ist. Die Verknüpfung entspricht der Operation des absoluten Frobenius. Dieser ist rein inseparabel, also trivial auf der Kohomologie. \square

In Theorem 7.5 kann also Φ^{-1} durch F ersetzt werden. Wir schreiben analog $F_x = \Phi_x^{-1}$.

Satz 7.14. *Theorem 7.5 ist für $Z(X, t, \mathcal{F})$ äquivalent zu*

$$\sum_{x \in \overline{X}^{F^n}} \text{Tr}(F^n | \mathcal{F}_{\overline{x}}) = \sum_r (-1)^r \text{Tr}(F^n | H_c^r(\overline{X}, \mathcal{F}))$$

für alle $n \geq 1$.

Bemerkung. Indem man \mathbb{F}_q durch \mathbb{F}_{q^n} ersetzt, genügt der Fall $n = 1$.

Lemma 7.15. *Sei $\alpha : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V . Dann gilt*

$$-\log \det(1 - \alpha t | V) = \sum_{n>0} \text{Tr}(\alpha^n | V) \frac{t^n}{n}$$

Beweis: Ohne Einschränkung ist der Grundkörper algebraisch abgeschlossen und α eine obere Dreiecksmatrix. Daher genügt es, den eindimensionalen Fall zu behandeln. Dann gilt die Aussage. \square

Beweis von Satz 7.14: Wir setzen das Lemma in die Definition von $Z(X, t, \mathcal{F})$ ein.

$$\begin{aligned} \log(Z(X, t, \mathcal{F})) &= \sum_{x \in X_0} \sum_m \text{Tr}(F_x^m | \mathcal{F}) \frac{t^{m \deg(x)}}{m} \\ &= \sum_n \sum_{\overline{x} \in \overline{X}_0} \text{Tr}(F^n | \mathcal{F}_{\overline{x}}) \frac{t^n}{n} \end{aligned}$$

Andererseits

$$\log \left(\prod_r \det(1 - Ft | H_c^r(\overline{X}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}} \right) = \sum_n \sum_r (-1)^r \text{Tr}(F^n | H_c^r(\overline{X}, \mathcal{F}))$$

\square

Lefschetzspurformel

Wir behandeln zunächst den konstanten Fall für X glatt projektiv. Die wesentliche Zutat ist eine Theorie von Zykelklassen in etaler Kohomologie. Sei hierfür k ein beliebiger Körper.

Literatur: Milne, Etale Cohomology, VI §12.

Theorem 7.16 (Lefschetz Fixpunktformel). *Sei k algebraisch abgeschlossen, X/k glatt projektiv, $\psi : X \rightarrow X$ ein Isomorphismus mit isolierten Fixpunkten, l eine Primzahl verschieden zur Charakteristik. Dann gilt*

$$|X^\psi| = \sum_{r=0}^{2 \dim X} \text{Tr}(\psi | H^r(X, \mathbb{Q}_l))$$

Korollar 7.17. *Für X/\mathbb{F}_q glatt und projektiv ist $Z(X, t)$ rational.*

Übungsaufgabe 7.3. Beweisen Sie in dieser Situation die Funktionalgleichung

$$Z(X, q^{-d}t) = \pm q^{d(\Delta.\Delta)/2} Z(X, t)$$

wobei $d = \dim X$ und $(\Delta.\Delta)$ die Selbstschnittzahl.

Der Beweis liefert gleich eine leichte Verallgemeinerung. Hierfür benötigen wir algebraische Zykeln.

Definition 7.18. *Sei X eine glatte zusammenhängende Varietät der Dimension d über k . Ein Primzykel der Kodimension i ist eine irreduzible abgeschlossene Untervarietät Z der Dimension $d - i$. Ein algebraischer Zykel ist eine formel \mathbb{Z} -Linearkombination von Primzykeln. Zwei algebraische Zykeln Z_0, Z_1 der Kodimension i heißen rational äquivalent, wenn es einen algebraischen Zykel T der Kodimension i auf $X \times \mathbb{A}^1$ gibt mit $T|_{X \times \{0\}} = Z_0$ und $T|_{X \times \{1\}} = Z_1$. Die i -te Chowgruppe $\text{Ch}^i(X)$ ist die Gruppe der rationalen Äquivalenzklassen von algebraischen Zykeln.*

Die Chowgruppen haben eine natürliche kontravariante Funktorialität für flache Morphismen und eine kovariante für eigentliche. Für glatt projektive Morphismen gibt es also beides.

Zwei Primzykel A, B schneiden sich *eigentlich*, wenn alle irreduziblen Komponenten die richtige Kodimension haben, also $\text{codim } A + \text{codim } B$. In dieser Situation gibt es eine Definition von *Schnittmultiplizitäten*. Hieraus wird ein zunächst partiell definiertes Schnittprodukt auf algebraischen Zykeln. Es gilt ein *Moving Lemma*, daher erhalten wir ein wohldefiniertes Schnittprodukt

$$\text{Ch}^i(X) \times \text{Ch}^j(X) \rightarrow \text{Ch}^{i+j}(X)$$

Ist X zusätzlich projektiv, so ist die *Gradabbildung*

$$\text{deg} : \text{Ch}^d(C) \rightarrow \mathbb{Z}$$

die jeden Punkt auf 1 abbildet, wohldefiniert und sogar ein Isomorphismus. Sind A und B Zykel mit $\text{codim } A + \text{codim } B = d$, so heißt $\text{deg}(A.B)$ auch *Schnittzahl*. Wir schreiben hierfür $(A.B)$.

Theorem 7.19 (Lefschetz Fixpunktformel). *Sei k algebraisch abgeschlossen, X/k glatt projektiv, $\psi : X \rightarrow X$ ein Isomorphismus, l eine Primzahl verschieden zur Charakteristik. Dann gilt*

$$(\Delta, \Gamma_\psi) = \sum_{r=0}^{2 \dim X} \text{Tr}(\psi | H^r(X, \mathbb{Q}_l))$$

wobei $\Delta \subset X \times X$ die Diagonale ist und $\Gamma_\psi = \{(x, \psi(x)) | x \in X\}$ der Graph von ψ .

Bemerkung. Die Schnittpunkte von Δ und Γ_ψ sind die Fixpunkte. Sind sie isoliert, so ist die Anzahl der Fixpunkte gleich der Schnittzahl. Die erste Fassung der Fixpunktformel folgt aus der zweiten.

Theorem 7.20. *Sei X/k glatt. Dann gibt es einen natürlichen Homomorphismus, die Zykelklasse*

$$c_X : \text{Ch}^i(X) \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Q}_l(d))$$

Dieser erfüllt die folgenden Rechenregeln.

(i) c_X ist ein Ringhomomorphismus bezüglich Schnitt- und Cupprodukt.

(ii) Sei $\pi : X \rightarrow X'$ flach. Dann gilt

$$\pi^* \circ c_{X'} = c_X \circ \pi^*$$

(iii) Sei $\pi : X \rightarrow X'$ projektiv. Dann gilt

$$\pi_* \circ c_X = c_{X'} \circ \pi_*$$

(iv) $c_X : \text{Ch}^0(X) \rightarrow H^0(X, \mathbb{Q}_l)$ ist die natürliche Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_l$, wobei $\text{Ch}^0(X)$ von der Klassen von X erzeugt wird.

Hier ist π_* für projektives $\pi : X \rightarrow X'$ in der Kohomologie nachzutragen. Sei

$$H_c^i(X, \mathbb{Q}_l(j)) = H_c^i(X', R\pi_! \mathbb{Q}_l(j)) = H^i(X', R\pi_* \mathbb{Q}_l(j)) \leftarrow H_c^i(X', \mathbb{Q}_l(j))$$

die kanonische Abbildung. Via Poincaré-Dualität (X und X' sind glatt und zusammenhängend!) erhält man

$$\pi_* : H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}_l(d-j)) \rightarrow H^{2d'-i}(X', \mathbb{Q}_l(d'-j))$$

Bemerkung. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so erhält man eine Galois-äquivalente Abbildung

$$\text{Ch}^i(\overline{X}) \rightarrow H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(d))$$

die über $H_{\text{cont}}^{2i}(X, \mathbb{Q}_l(d))$ faktorisiert. Letzteres ist die \mathbb{Q}_l -Version von etaler Kohomologie über dem Grundkörper. Speziell für $X = \text{Spec } k$ ist es stetige Galois-kohomologie.

Zum Schluss wollen wenigstens die Zutaten der Definition der Zykelklasse durchgehen.

Sei X glatt, zusammenhängend der Dimension d , $Z \subset X$ abgeschlossen der Dimension d' , ebenfalls glatt. Kovariante Funktorialität für die abgeschlossene Immersion ergibt:

$$H^{2d'-i}(Z, \mathbb{Q}_l(d'-j)) \rightarrow H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}_l(d-j))$$

Für $i = 2d'$, $j = d'$ ist die linke Gruppe natürlich isomorph zu \mathbb{Q}_l , also

$$\mathbb{Q}_l \rightarrow H^{2 \operatorname{codim} Z}(X, \mathbb{Q}_l(\operatorname{codim} Z))$$

Das Bild von 1 unter dieser Abbildung ist die Zykelklasse von Y .

Die Ausdehnung auf allgemeine Primzahl benützt die Theorie der Chernklassen.

Definition 7.21. Sei X/k ein Varietät, n teilerfremd zur Charakteristik von k . Dann wird die erste Chernklasse

$$c_1 : \operatorname{Pic}(\overline{X}) \rightarrow H^2(\overline{X}, \mu_n)$$

definiert aus Randabbildung zur Kummersequenz

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

Die Abbildung ist verträglich mit den natürlichen Galois-Operationen auf beiden Seiten.

Grothendieck hat eine Methode vorgestellt, aus dieser ersten Chern-Klasse höhere Chernklassen für Vektorbündel zu definieren. Voraussetzung sind verschiedene formale Eigenschaften der Kohomologietheorie, vor allem:

Satz 7.22 (Projektive Bündelformel). Sei E/X ein Vektorbündel vom Rang $d+1$, $\mathbb{P}(E)$ seine Projektivierung mit tautologischem Geradenbündel $L/\mathbb{P}(E)$. Sei

$$\xi = c_1(L) \in H^2(\overline{\mathbb{P}(E)}, \mu_n)$$

Dann gilt

$$H^*(\overline{\mathbb{P}(E)}, \mathbb{Z}/n) \cong \bigoplus_{i=0}^d H^{*-2i}(\overline{X}, \mu_n^{-i})$$

wobei der Summand zum Index i via $\cup \xi^i$ eingebettet wird.

Beweis: Sei $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ der Bündelmorphismus. Gezeigt wird

$$R\pi_* \mathbb{Z}/n = \bigoplus_{i=0}^d \mu_n^{-i}[-2i]$$

Die Abbildung ist gegeben durch Cup-Produkt mit ξ^i . Die Aussage wird dann auf Kohomologiegarben überprüft. Dort ist sie lokal, d.h. wir können annehmen, dass E trivial ist. Mit eigentlichem Basiswechsel reduzieren wir uns auf den Fall, dass X ein Punkt ist. Dann ist es die Formel für die Kohomologie von \mathbb{P}^d . \square

Mit diesen Rechenregeln ist der Beweis derselbe wie in der Topologie.

Beweis von Theorem 7.19: Sei X glatt projektiv, $\psi : X \rightarrow X$ ein Isomorphismus. Zur Vereinfachung identifizieren wir \mathbb{Q}_l mit $\mathbb{Q}_l(1)$ und ignorieren die Twists. Wir rechnen in $H^*(X \times X) := H^*(X \times X, \mathbb{Q}_l)$. Die Zykeln Δ und Γ_ψ sind Bilder von X unter abgeschlossenen Immersionen $(\text{id}, \text{id}) : X \rightarrow X \times X$ und $(\text{id}, \psi) : X \rightarrow X \times X$. Die Projektionsabbildungen $p, q : X \times X \rightarrow X$ sind sowohl flach als auch projektiv. Sei $(e_i^r)_{i \in I_r}$ eine Basis von $H^r(X)$ und (f_i^{2d-r}) die duale Basis bezüglich Poincaré-Dualität. Den oberen Index lassen wir oft weg. Sei insbesondere e^{2d} der kanonische Erzeuger von $H^{2d}(X)$.

Behauptung. Für $b \in H^*(X, \mathbb{Q}_l(j))$ gilt

$$p_*(c_{X \times X}(\Gamma_\psi) \cup q^*(b)) = \psi^*(b)$$

Es gilt $p \circ (\text{id}, \psi) = \text{id}$. Daher

$$\begin{aligned} p_*(c_{X \times X}(\Gamma_\psi) \cup q^*(b)) &= p_*(1, \psi)_*(1) \cup q^*(b) \\ &= p_*(1, \psi)_*(1 \cup (1, \psi)^* q^*(b)) \\ &= \text{id}_*(1 \cup \psi^*(b)) \\ &= \psi^*(b) \end{aligned}$$

(wegen Definition von $c_{X \times X}(\Gamma_\psi)$, Projektionsformel, Funktorialität).

Behauptung. $c_{X \times X}(\Gamma_\psi) = \sum_{r,i} \psi^*(e_i^r) \otimes f_i^{2d-r}$

Wir schreiben $c_{X \times X}(\Gamma_\psi) = \sum_i a_i \otimes e_i'$ in der Basis (f_i) . Wir wenden die erste Behauptung an auf $b = e_j$:

$$\begin{aligned} \psi^*(e_j) &= p_* \left(\left(\sum_i a_i \otimes f_i \right) \cup 1 \otimes e_j \right) \\ &= p_*(a_j \otimes e^{2d}) \\ &= a_j \end{aligned}$$

Speziell für $\psi = \text{id}$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} c_{X \times X}(\Delta) &= \sum_{r,i} e_i^r \otimes f_i^{2d-r} \\ &= \sum (-1)^{r(2d-r)} f_i^{2d-r} \otimes e_i^r \\ &= \sum_{r,i} (-1)^r f_i^{2d-r} \otimes e_i^r \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
c_{X \times X}(\Gamma_\psi \cdot \Delta) &= c_{X \times X}(\Gamma_\psi) \cup c_{X \times X}(\Delta) \\
&= \left(\sum_{r,i} \psi^*(e_i^r) \otimes f_i^{2d-r} \right) \cup \left(\sum_{r,i} (-1)^r f_i^{2d-r} \otimes e_i^r \right) \\
&= \sum_{r,i} (-1)^r (\psi^*(e_i^r) \cup f_i^{2d-r}) \otimes e^{2d} \\
&= \sum_{r=1}^{2d} (-1)^r \text{Tr}(\psi^*)(e^{2d} \otimes e^{2d})
\end{aligned}$$

(wegen Verträglichkeit mit Cup-Produkt, vorherigen Formeln, duale Basis) denn $\psi^*(e_i^r) \cup f_i^{2d-r}$ ist der Koeffizient von e_j^r , wenn $\psi^*(e_i^r)$ in der Basis e_j^r geschrieben wird. \square

Twisten

Sei ab jetzt $\Lambda = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$, k wieder ein endlicher Körper.

Theorem 7.23. *Sei X/\mathbb{F}_q glatte Kurve, $F: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ der geometrische Frobenius, l eine Primzahl verschieden zur Charakteristik. Dann gilt*

$$|\bar{X}^F| = \sum_{r=0}^{2 \dim X} \text{Tr}(F^* | H_c^r(\bar{X}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})) \pmod{l^n}$$

Bemerkung. Für glatte Kurven ist $H_c^r(\bar{X}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ stets ein freier Λ -Modul. Dies erlaubt die Definition von Spuren. Auch Poincaré-Dualität und Projektivonsformel verhalten sich wie im \mathbb{Q}_l -Fall.

Beweis: Wegen unserer Vorüberlegungen (Satz 7.14 und Lemma 7.6), genügt es, den glatt projektiven Fall zu betrachten. Die Argumente sind identisch mit denen für glatt projektive Varietäten und \mathbb{Q}_l -Koeffizienten. \square

Für den Beweis von Satz 7.14 fehlt uns nach Korollar 7.7 nur noch eine Version dieses Satzes mit nicht-konstanten Koeffizienten. Wir übergehen die Frage, wie der saubere Formalismus von Spuren über Ringen funktioniert.

Satz 7.24. *Sei X/\mathbb{F}_q eine glatte Kurve, l eine Primzahl ungleich der Charakteristik, $\Lambda = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. Sei \mathcal{F} eine lokal-konstante Λ -Garbe auf X mit Λ -freien Halmen. Dann gilt*

$$\sum_{\bar{x} \in \bar{X}^F} \text{Tr}(F^* | \mathcal{F}_{\bar{x}}) = \sum_r (-1)^r \text{Tr}(F^* | H_c^r(\bar{X}, \mathcal{F}))$$

Bemerkung. Beginnen wir statt dessen mit einer glatten Garbe auf X , so erhalten wir im Limes die gewünschte Aussage.

Sei $Y \rightarrow X$ eine Galois-Überlagerung, d.h. endlich und etale, mit Decktransformationsgruppe G . Sei $\Lambda[G]$ der Gruppenring. Aus der Theorie der etalen Fundamentalgruppe erhalten wir eine Kategorienäquivalenz zwischen lokal-konstanten Garben auf X , die auf Y konstant werden und Darstellungen von G bzw. $\Lambda[G]$ -Moduln. Wir schreiben $\otimes := \otimes_\Lambda$.

Lemma 7.25. *Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Galois-Überlagerung (d.h. endlich und etale) mit $G = \text{Aut}(Y/X)$. Sei M ein $\Lambda[G]$ -Modul mit assoziierter Garbe \mathcal{F} auf X . Dann gilt*

$$R\Gamma_c(\overline{X}, \mathcal{F}) \cong R\Gamma_c(\overline{Y}, \Lambda) \otimes_{\Lambda[G]}^{\mathbb{L}} M$$

Beweis: (Wir ignorieren alle Probleme mit Endlichkeitsbedingungen. Hierfür wäre eine Diskussion von perfekten Komplexen nötig.)

Auf Y ist M konstant. Mit Projektionsformel für den (nicht-kommutativen) Ring $\Lambda[G]$ und für den Ring Λ folgt

$$\begin{aligned} R\Gamma_c(\overline{Y}, \Lambda) \otimes_{\Lambda[G]}^{\mathbb{L}} M &\cong R\Gamma_c(\overline{X}, \pi_* \Lambda) \otimes_{\Lambda[G]}^{\mathbb{L}} M \\ &\cong R\Gamma_c(\overline{X}, \pi_* \Lambda) \otimes^{\mathbb{L}} M \otimes_{\Lambda[G]}^{\mathbb{L}} \Lambda \\ &\cong R\Gamma_c(\overline{X}, \pi_* \Lambda \otimes M_X) \otimes_{\Lambda[G]}^{\mathbb{L}} \Lambda \\ &\cong R\Gamma_c(\overline{X}, \pi_* \Lambda \otimes M_X \otimes_{\Lambda[G]} \Lambda) \end{aligned}$$

Behauptung. $\mathcal{F} \cong \pi_* \Lambda \otimes M_X \otimes_{\Lambda[G]} \Lambda$

Die Spur

$$\pi_* \pi^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

induziert einen Isomorphismus $(\pi_* \pi^* \mathcal{F})_G \rightarrow \mathcal{F}$, da dies halmweise gilt. Weiterhin

$$\begin{aligned} (\pi_* \pi^* \mathcal{F})_G &= (\pi_* \pi^* \mathcal{F}) \otimes_{\Lambda[G]} \Lambda \\ &= (\pi_*(\Lambda \otimes M_X)) \otimes_{\Lambda[G]} \Lambda \\ &= \pi_* \Lambda \otimes M_X \otimes_{\Lambda[G]} \Lambda \end{aligned}$$

□

Beweisidee für Satz 7.24: Wir können ohne Einschränkung zu einer offenen Teilmenge übergehen, d.h. ohne Einschränkung ist \overline{X}^F leer. Zu zeigen ist, dass die rechte Seite 0 ist. Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Galoisüberlagerung, so dass $\pi^* \mathcal{F}$ konstant ist. Auch \overline{Y}^F ist leer, also gilt

$$\sum_r (-1)^r \text{Tr}(F^* | H_c^r(\overline{Y}, \pi^* M)) = 0$$

Zu zeigen ist also, wenn K^\bullet ein Komplex von $\Lambda[G]$ -Moduln ist mit verträglicher Operation von F , so dass die Spur von F^* verschwindet, dann gilt dies auch für $K^\bullet \otimes_{\Lambda[G]}^{\mathbb{L}} \Lambda$. Dies folgt aus Rechenregeln für nicht-kommutative Spuren. □

Inhaltsverzeichnis

0	Wiederholung	1
1	Endlichkeitsbedingungen	7
2	Der Kurvenfall	17
3	Eigentlicher Basiswechsel	27
4	l-adische Garben	37
5	Hauptsätze und Anwendungen	45
6	Cup-Produkte und Künnethformel	53
7	Frobenius und die Rationalität der Zeta-Funktion	61