Seminar “Nichtarchimedische Analysis und rigide Geometrie”

Sommersemester 2012

Stand 17. Februar 2012

Achtung Terminänderung, neuer Termin ist: donnerstags, 12-14 Uhr, SR404, Eckerstrasse 1.

Vorbesprechung: Donnerstag, 16.2.2012, 13-14 Uhr, SR414, Eckerstrasse 1.

Viele Konzepte der Analysis wie Konvergenz, Grenzwerte, Potenzreihen, Ableitung oder Differentialgleichungen kann man allgemein für bewertete Körper betrachten. Für $\mathbb{R}$ sind diese Konzepte aus der Analysis-Vorlesung bekannt, für $\mathbb{C}$ vielleicht aus der Funktionentheorie. Die nicht-archimedische Analysis betrachtet diese Konzepte über nicht-archimedisch bewerteten Körpern wie $\mathbb{Q}_p$ oder $\mathbb{F}_p((t))$.

Zu Beginn des Seminars werden die grundlegenden Begriffe von normierten und bewerteten Körpern behandelt, insbesondere auch die Konstruktion von $\mathbb{C}_p$, dem nicht-archimedischen Analogon des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Im Verlauf des Seminars beschäftigen wir uns besonders mit “analytischen Funktionen” und “analytischen Teilmengen der Einheitskreisscheibe” über solchen nicht-archimedisch bewerteten Körpern. Dies führt zu den affinoiden Algebren und affinoiden Varietäten. Allgemeine rigide Räume erhält man dann durch geeignetes Zusammenkleben dieser affinoiden Varietäten, analog zur Konstruktion von Mannigfaltigkeiten in der Differentialgeometrie oder Schemata in der algebraischen Geometrie.

Daß die nicht-archimedische Analysis und rigide Geometrie über p-adischen Körpern wie $\mathbb{Q}_p$ auch zahlentheoretische Bedeutung hat, soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden. Zum einen Dworks Beweis der Rationalität der Zeta-Funktion für Varietäten über endlichen Körper, zum anderen Harbaters Beweis der Existenz von Galois-Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p(T)$.

Hinweis: Die Referenzen auf [Bosch], [BGR84] und [FP04] sind als Alternativen zu verstehen, die sich insbesondere auch im Detaillierungsgrade unterscheiden.

Vorträge

1. **Vortrag 1: Bewertete Körper**

   26.4.2012

   (Halb-)Normen auf Körpern, Ringen, Moduln. Definition (diskrete) Bewertung, bewertete Körper, Beispiele $\mathbb{Q}_p$, $k((t))$, lokale Körper. Bewertungsringe, Ring der Witt-Vektoren.

[FP04, Abschnitt 1.1], [BGR84, Kapitel 1.1,1.2,1.5, 1.6], [Bosch, Abschnitt 1.1], oder [Ked10, Abschnitt I.1]

2. **Vortrag 2:** $\mathbb{C}_p$

   03.05.2012

   Definition und Eigenschaften von $\mathbb{C}_p$, insbesondere auch Fortsetzung von Bewertungen, sphärische Vollständigkeit.

   [Kob84, Kapitel III]

3. **Vortrag 3: Banach-Räume und Banach-Algebren**

   10.05.2012

   Definition Banach-Raum, Banach-Algebra, Beispiele, grundlegende Eigenschaften, Satz von Hahn-Banach, Berkovich-Spektrum

   [FP04, Abschnitt 1.2], [BGR84, Kapitel 2.2, 2.8, 3.7, 3.8], [Ber90, Kapitel 1]

4. **Vortrag 4: Konvergente Potenzreihen und Tate-Algebra**

   24.05.2012

   Definition Tate Algebra T_n, Beispiele (exp und log), Weierstraß-Theorie und Konsequenzen (T_n ist noethersch und ganz-abgeschlossen)

   [Bosch, Abschnitt 1.2], [BGR84, Kapitel B.5], auch [FP04, Kapitel 3]

5. **Vortrag 5: Rationalität der Zeta-Funktion**

   14.06.2012

   Erste zahlentheoretische Anwendung. Definition der Zeta-Funktion einer Varietät über einem endlichen Körper. Beweis, daß die Zeta-Funktion eine rationale Funktion ist.

   [Kob84, Kapitel V]

6. **Vortrag 6: Affinoide Algebren**

   21.06.2012

   Definition affinoide Algebren, Beispiele, Noether-Normalisierung, Normen auf affinoiden Algebren und Maximum-Prinzip, affinoide Algebren sind Banach-Algebren

   [Bosch, Abschnitt 1.4], [BGR84, Kapitel 6], [FP04, Kapitel 3].

7. **Vortrag 7: Affinoide Varietäten**

   28.06.2012

   Definition Spektrum der maximalen Ideale einer affinoiden Algebra, Nullstellensatz, topologische Eigenschaften affinoider Varietäten

   [Bosch, Kapitel 1.5], [BGR84, Kapitel 7.1]

8. **Vortrag 8: Affinoide Teilgebiete**

   05.07.2012

   Definition affinoide Teilgebiete, kanonische Topologie, Weierstraß- und Laurent-Gebiete.

   [Bosch, Kapitel 1.6], [BGR84, Kapitel 7.2]

9. **Vortrag 9: Der Satz von Gerritzen und Grauert**

   12.07.2012

   Beweis des Satzes von Gerritzen und Grauert zur Charakterisierung lokal abgeschlossener Immersionen

   [Bosch, Kapitel 1.7,1.8], [BGR84, Kapitel 7.3], alternativ [Tem05]

10. **Vortrag 10: Rigide Räume**

    19.07.2012

    Definition Grothendieck-Topologie, Grothendieck-Topologie auf affinoiden Varietäten, Definition rigide Räume als lokal affinoide Räume, Beispiele. Insbesondere sollte die projektive Gerade $\mathbb{P}^1$ ausführlich diskutiert werden, cf. [FP04, Kapitel 2].

    [Bosch, Kapitel 1.10, 1.12], [FP04, Kapitel 2,4.2,4.3], [BGR84, Kapitel 9.1,9.3].

11. **Vortrag 11: Galois-Gruppen über $\mathbb{Q}_p(T)$**

    26.07.2012

    Zweite zahlentheoretische Anwendung. Jede endliche Gruppe kommt als Galois-Gruppe einer Erweiterung von $\mathbb{Q}_p(T)$ vor.

    [Har87] oder [Liu95].

Literatur

[Ber90] V.G. Berkovich. Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields. Mathematical Surveys and Monographs, 33. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert. Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 261. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Bosch] S. Bosch. Lectures on formal and rigid geometry. `http://wwwmath.uni-muenster.de/sfb/about/publ/heft378.pdf`

[FP04] J. Fresnel and M. van der Put. Rigid analytic geometry and its applications. Progress in Mathematics, 218. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[Har87] D. Harbater. Galois coverings of the arithmetic line. Number theory (New York, 1984–1985), 165–195, Lecture Notes in Math. 1240, Springer, 1987.

[Ked10] K.S. Kedlaya. p-adic differential equations. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 125. Cambridge University Press, 2010.

[Kob84] N. Koblitz. p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 58. Springer-Verlag, 1984.

[Liu95] Q. Liu. Tout groupe fini est un groupe de Galois sur $\mathbb{Q}_p(T)$, d'après Harbater. Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993), 261–265, Contemp. Math., 186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Sch02] P. Schneider. Nonarchimedean functional analysis. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/schneider/publ/lectnotes/`

[Tem05] M. Temkin. A new proof of the Gerritzen-Grauert theorem. Math. Ann. 333 (2005), no. 2, 261–269.