“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2013 — Übungsblatt 1

Ausgabe: 18.04.2013, **Abgabe:** 25.04.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

und bitte senden Sie eine (leere) eMail an kommalg-on@math.uni-freiburg.de, um in unseren Verteiler aufgenommen zu werden.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^3$ gegeben durch $Y = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}(Y)$ isomorph zu einem Polynomring $k[X]$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2: Skizzieren Sie graphisch die folgenden algebraischen Mengen im $\mathbb{R}^2$:

(i) $V(x^3 + y^3 + 1)$ $\quad$ (ii) $V(x^2 - x - xy + y)$ $\quad$ (iii) $V(x^2 + y^2 - 1, x - y)$

(4 Punkte)

Aufgabe 1.3: Die affine Ebene $\mathbb{A}^2$ kann als Menge auf natürliche Art mit $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ identifiziert werden. Zeigen Sie, daß die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2$ nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologien auf $\mathbb{A}^1$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.4: Welche der folgenden Teilmengen sind Ideale? (Mit Begründung)

(i) Die Menge $\{f(X, Y) \in k[X, Y] \mid f(X, 0) = f(0, Y) = 0\}$ in $k[X, Y]$.

(ii) Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, $S \subseteq R$ ein Teilring. Ist $S \cap I$ ein Ideal in S? Ist $S \cap I$ ein Ideal in R?

(2 Punkte)

Aufgabe 1.5: Sei $\phi : k[X] \to k[X]$ ein Ringhomomorphismus. Unter welchen Bedingungen ist ϕ ein Isomorphismus?

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Anwesenheitsaufgaben, 23./24.04.13

Aufgabe 1.6:

(i) Bestimmen Sie alle Ideale im Ring $\mathbb{Z}$.

(ii) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/(n)$ ein Ring ist.

(iii) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/(n)$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 1.7:

(i) Formulieren Sie den Homomorphiesatz und die Isomorphiesätze für Vektorräume.

(ii) Zeigen Sie, daß es einen Ringisomorphismus $\mathbb{C}[X]/(X^n - 1) \cong \mathbb{C}^n$ gibt (wobei $\mathbb{C}^n$ mit komponentenweiser Multiplikation und Addition ausgestattet ist).

(iii) Bestimmen Sie die Struktur von $\mathbb{Z}[X]/(15, x^2+1)$. Listen Sie alle Ideale auf.

Aufgabe 1.8:

(i) Geben Sie die Definition des Begriffs des topologischen Raumes an.

(ii) Eine Menge B von Teilmengen eines topologischen Raums X heißt Basis, wenn jede Menge aus B offen ist und sich jede offene Menge als Vereinigung von Mengen aus B darstellen läßt.

Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Die Mengen $I(a) = \{b \in X \mid a \leq b\}$ *erzeugen* eine Topologie auf X (gröbste Topologie auf X so, dass alle $I(a)$ offen sind). Bilden diese Mengen eine Basis der Topologie (mit Begründung)?

(iii) Ein topologischer Raum X heißt hausdorffsch, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ disjunkte offene Umgebungen U_x von x und U_y von y existieren. Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn X nicht als Vereinigung von zwei disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen geschrieben werden kann.

Wann ist der topologische Raum aus (ii) hausdorffsch bzw. zusammenhängend?