“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2013 — Übungsblatt 10

Ausgabe: 27.06.2013, **Abgabe:** 04.07.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 10.1: Beweisen Sie den Austauschsatz für algebraisch unabhängige Elemente: Sei A eine nullteilerfreie, endlich erzeugte k-Algebra, $v_1, \ldots, v_n$ eine Transzendenzbasis von A über k, sowie $w_1, \ldots, w_l \in A$ algebraisch unabhängig über k. Zeigen Sie:

1. Es gilt $l \leq n$, und man kann l Elemente unter den $v_1, \ldots, v_n$ durch $w_1, \ldots, w_l$ ersetzen und erhält wieder eine Transzendenzbasis.
2. Satz 6.10 im Skript.

(5 Punkte)

Aufgabe 10.2: Sei $V = V(X^2Y^2Z^2 - X^4YZ + 1) \subset \mathbb{A}^3_k$. Geben Sie explizit einen *endlichen* Morphismus von affinen Varietäten

$$V \to \mathbb{A}^2$$

an.

(3 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 10.3:

(a) Sei A eine reduzierte (A enthält keine nilpotenten Elemente) k-Algebra, die als k-Vektorraum von endlicher Dimension ist. Zeigen Sie, dass es dann ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} k.$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass für einen endlichen Morphismus $f : X \to Y$ von affinen Varietäten jeder Punkt $P \in Y$ als Urbild $f^{-1}(P)$ nur endlich viele Punkte hat.

(c) Geben Sie ein Beispiel eines Morphismus $f : X \to Y$, bei dem jeder Punkt $P \in Y$ als Urbild nur endlich viele Punkte hat, der aber trotzdem kein endlicher Morphismus ist.

(8 Punkte)