"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2013 — Übungsblatt 11

Ausgabe: 04.07.2013, **Abgabe:** 11.07.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Beweisen Sie das Gausslemma für normierte Polynome: Sei A ein nullteilerfreier Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung. Sei $F \in A[T]$ ein normiertes Polynom und $G \in Q(A)[T]$ ebenfalls normiert mit $G|F$. Dann gilt $G \in A[T]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.2: Betrachten Sie die Kurven $V = V(X^3 + Y^3 - Z^3) \subset \mathbb{P}^2$ und $W = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{P}^2$. Berechnen Sie $V \cap W$ und alle Schnittmultiplizitäten.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.3: Bestimmen Sie das Hilbert-Polynom und den Grad der Varietät $V(I) \subseteq \mathbb{P}^3$, die durch das homogene Ideal $I = (XZ - Y^2, YW - Z^2, XW - YZ)$ gegeben ist.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 11.4: Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Sei $\mathrm{Sym}(V)$ die symmetrische Algebra von V, d.h. der k-Vektorraum, der von abstrakten Symbolen

$$[v_1 v_2 \cdots v_n], \qquad n \in \mathbb{N}_0, v_i \in V$$

erzeugt wird, mit der Multiplikation

$$[v_1 v_2 \cdots v_n] \cdot [w_1 w_2 \cdots w_n] = [v_1 v_2 \cdots v_n w_1 w_2 \cdots w_n]$$

modulo dem (beidseitigen) Ideal, welches von

$$[v_1 v_2] - [v_2 v_1]$$

und

$$[\lambda v_1 + \mu v_2] - \lambda[v_1] - \mu[v_2]$$

erzeugt wird. (Sie wird eine k-Algebra durch $\mu \mapsto \mu[\emptyset]$.)

1. Definieren Sie eine natürliche Graduierung auf $\mathrm{Sym}(V)$.

2. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Sym}(V)$ die folgende universelle Eigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "v \mapsto [v]"'] & A \\ \mathrm{Sym}(V) \arrow[ur, dashed, "\exists! \widetilde{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

   Für jede kommutative k-Algebra A und jede *k-lineare Abbildung* $\alpha : V \to A$ existiert ein eindeutig bestimmter *k-Algebrenhomomorphismus* $\widetilde{\alpha} : \mathrm{Sym}(V) \to A$ welcher obiges Diagramm kommutativ macht.

3. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Definieren Sie eine natürliche (in Abhängigkeit von $\mathcal{B}$) Abbildung

$$k[X_1, \ldots, X_n] \to \mathrm{Sym}(V),$$

   und beweisen Sie, dass es ein Isomorphismus von graduierten k-Algebren ist.

(4 Punkte)