“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2013 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 02.05.2013, **Abgabe:** 09.05.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Bestimmen Sie zum Ideal

$$I = (10, 6X^2 + 8, 4X^3 - 12)$$

in $\mathbb{Z}[X]$ die im Beweis des Hilbertschen Basissatzes konstruierte Idealkette, und das zugehörige Erzeugendensystem von I. Schreiben Sie die drei ursprünglich gegebenen Erzeuger als Linearkombination von Elementen des so bestimmten Erzeugendensystemes.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Sei R ein Ring, I ein Ideal von R und p die Projektion $R \to R/I$.

1. Beweisen Sie, dass p^{-1} die folgende Bijektion induziert:
$$\{\text{Ideale von } R/I\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Ideale von } R, \text{ die I enthalten}\}.$$
2. Gilt dieselbe Aussage mit “Ideale” ersetzt durch “Primideale”[1] bzw. “maximale Ideale”?

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3: Sei R ein Ring.

1. Das Radikal des Nullideals (0) von R nennt man auch das **Nilradikal** $\mathrm{Nil}(R)$. Sei I ein Ideal von R. Beweisen Sie, dass $p^{-1}(\mathrm{Nil}(R/I)) = \sqrt{I}$, wobei p die Projektion $R \to R/I$ ist.
2. Der Schnitt aller *maximalen* Ideale von R heisst das **Jacobsonradikal** $\mathrm{Jac}(R)$. Beweisen Sie: $\mathrm{Nil}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(R)$.
3. Beweisen Sie:
$$\mathrm{Jac}(R) = \{x \in R \mid 1 - xy \text{ invertierbar für alle } y \in R\}.$$

(6 Punkte)

(bitte wenden)

[1] nur falls Sie bereits wissen, was dies bedeutet.

Aufgabe 3.4:
Gegeben sei das folgende Diagramm von R-Modulhomomorphismen, in dem die beiden Zeilen exakte Sequenzen sind:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Wenn b und d Isomorphismen sind, a surjektiv und e injektiv ist, dann ist c ein Isomorphismus.

(6 Punkte)