"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2013 — Übungsblatt 4

Ausgabe: 09.05.2013, **Abgabe:** 16.05.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie:

1. Falls X irreduzibel ist, so sind alle offenen Teilmengen dicht in X.
2. Falls $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $Y \subseteq U$ eine in U abgeschlossene Teilmenge ist, dann gilt
$$\overline{Y} \cap U = Y.$$
(Mit $\overline{Y}$ ist hier der Abschluss in X gemeint.)

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beweisen Sie, dass
$$V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3_k$$
eine Vereinigung von 3 irreduziblen Komponenten ist und finden Sie die entsprechenden Primideale.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei R ein kommutativer Ring. Sei $f \in R$. Betrachten Sie die Teilmenge
$$U := \{1, f, f^2, \dots\} \subseteq R$$
(oder allgemeiner eine *multiplikativ abgeschlossene* Teilmenge). Beweisen Sie: Ein Ideal $I \subseteq R$, welches maximal ist mit der Eigenschaft "$I \cap U = \emptyset$" ist prim.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Sei R ein kommutativer Ring. Das Radikal des Nullideals (0) von R, also das **Nilradikal** (siehe letztes Übungsblatt) $\mathrm{Nil}(R)$ besteht offenbar gerade aus den nilpotenten Elementen von R. Beweisen Sie, dass es gleich dem Schnitt aller Primideale von R ist.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4.3. Sie müssen entweder das Zorn'sche Lemma anwenden, dürfen aber auch annehmen, dass R noethersch ist. Dann geht es ohne.

(4 Punkte)