“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2013 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 16.05.2013, **Abgabe:** 31.05.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann noethersch ist, wenn alle offenen Teilmengen quasi-kompakt in der induzierten Topologie sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Zeigen Sie

$$k[X_1, \ldots, X_n] = \bigcap_{\mathfrak{p} \subseteq k[X_1,\ldots,X_n] \text{ prim}} k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{p}}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.3: Sei A ein kommuativer Ring, $S \subset A$ multiplikativ. Beweisen Sie, dass ein $S^{-1}A$-Modul dasselbe ist, wie ein A-Modul, auf dem alle Elemente in S als Automorphismen wirken. Insbesondere ist die Abbildung $M \to S^{-1}M$ genau dann bijektiv, wenn alle Elemente von S auf M als Automorphismen wirken.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.4: Sei A ein kommutativer Ring, $f \in A$, f nicht nilpotent. Sei $S = \{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. Beweisen Sie:

$$S^{-1}A \cong A[X]/(fX - 1).$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 5.5: Verallgemeinern Sie Aufgabe 5.4 auf beliebige multiplikative Mengen S.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 5.6: Sei A ein kommuativer Ring, $S \subset A$ multiplikativ und M ein A-Modul. Beweisen Sie:

$$S^{-1}M \cong (S^{-1}A) \otimes_A M.$$

Hinweis: $M \otimes_A N$ bezeichnet das Tensorprodukt zweier Moduln M und N. Es wird erzeugt von Symbolen $m \otimes n$, $m \in M$, $n \in N$ modulo der Relationen

$$\begin{gathered}
(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n \qquad \forall m_1, m_2 \in M, n \in N, \\
m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2 \qquad \forall m \in M, n_1, n_2 \in N, \\
(\alpha m) \otimes n = m \otimes (\alpha n) \qquad \forall m \in M, n \in N, \alpha \in A.
\end{gathered}$$

(4 Punkte)