"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2013 — Übungsblatt 7

Ausgabe: 06.06.2013, **Abgabe:** 13.06.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 7.1: Gegeben sei ein Polynom $f(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ und $V(f) \subset \mathbb{A}_k^n$ die dadurch definierte affine Varietät. Homogenisieren liefert ein homogenes Polynom $F(X_0, X_1, \ldots, X_{n+1}) \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass der Abschluß von $V(f)$ in $\mathbb{P}^n$ genau die durch F definierte projektive Varietät ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.2: Betrachten Sie die Standardeinbettung

$$\mathbb{A}_k^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2.$$

Das Komplement C von $\mathbb{A}_k^2$ ist natürlich isomorph zu $\mathbb{P}_k^1$ und wird die unendlich ferne Gerade genannt.

1. Seien $L_1 = V(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1), L_2 = V(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$ zwei *parallele* Geraden in $\mathbb{A}_k^2$. (Welche Relation zwischen den $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ impliziert dies?)

   Beweisen Sie: $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ besteht aus genau einem Punkt in C. Wie lauten seine Koordinaten?

2. Betrachten Sie die Menge $\mathcal{L}$ der Äquivalenzklassen von Geraden in $\mathbb{A}_k^2$ modulo der Relation

   $$L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow L_1 \text{ und } L_2 \text{ sind parallel.}$$

   Beweisen Sie, dass die Abbildung $L_1 \mapsto \overline{L_1} \cap C$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{L}$ und C herstellt.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 7.3: Die Gleichung $x^2 + y + 1 = 0$ definiert eine affine Kurve in $\mathbb{A}_k^2$, wir bezeichnen mit C den Abschluß dieser Kurve im $\mathbb{P}_k^2$. Geben Sie für die affinen Teilmengen

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2, i = 0, 1, 2$$

jeweils die definierende Gleichung von $C \cap U_i$ an. Zeichnen Sie die reellen Graphen der entsprechenden Kurven.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.4: Sei in dieser Aufgabe $k = \mathbb{C}$. Die Menge $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ist als Quotient von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit der Quotiententopologie der natürlichen Topologie auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ausgestattet. Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ mit dieser Topologie kompakt ist.

(4 Punkte)