"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2013 — Übungsblatt 9

Ausgabe: 20.06.2013, **Abgabe:** 27.06.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss13/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper (Char. 0 für Aufgabe 3).

Aufgabe 9.1: Seien $V \subset \mathbb{P}_k^n, W \subset \mathbb{P}_k^m$ projektive Varietäten. Beweisen Sie, dass eine Abbildung $\alpha : V \to W$ genau dann ein Morphismus von Varietäten ist, wenn für jeden Punkt $p \in V$ eine offene Umgebung $U \ni p$ und homogene Polynome $p_0, \ldots, p_m \in k[V]$ vom selben Grad existieren, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p_n^{-1}U \setminus \{0\} \arrow[r, "p_0,\ldots,p_m"] \arrow[d, "\alpha|_U \circ p_n"] & k^{m+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "p_m"] \\ W \arrow[r, hook] & \mathbb{P}_k^m \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Hier ist $p_n : k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^n$ die Projektion.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2: Selbsttest (nach Möglichkeit *ohne* im Skript nachzusehen).

1. Definieren Sie "Primideal".
2. Definieren Sie die Zariski-Topologie auf einer affinen algebraischen Menge.
3. Definieren Sie "multiplikative Menge S eines Ringes R" und die Lokalisierung $S^{-1}R$.
4. Definieren Sie "noetherscher Ring", "noetherscher Modul", "noetherscher topologischer Raum".
5. Definieren Sie den lokalen Ring einer affinen Varietät X an einem Punkt $p \in X$.
6. Formulieren Sie den Hilbertschen Basissatz.
7. Formulieren Sie den Hilbertschen Nullstellensatz (starke Form).

(7 Punkte)

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 9.3: Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{L \subset k^4 \mid L \text{ zweidimensionaler Unterraum}\}$$

eine natürliche Struktur einer projektiven Varietät eingebettet in $\mathbb{P}^5_k$ besitzt. Diese Menge kann auch als die Menge der "Geraden" im $\mathbb{P}^3_k$ aufgefasst werden. *Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:*

1. *Rufen Sie sich die Definition des äusseren Produktes $\Lambda^k V$ eines Vektorraumes V in Erinnerung. Beweisen Sie, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : \{L \subset k^4 \mid L \textit{ zweidimensionaler Unterraum}\} &\to \mathbb{P}^5_k \cong \mathbb{P}(\Lambda^2 k^4) \\ L =< v, w > &\mapsto v \wedge w \end{aligned}$$

   wohldefiniert und injektiv ist.

2. *Konstruieren Sie einen Isomorphismus*

$$\Lambda^2 V \xrightarrow{\sim} \{ \textit{ alternierende Bilinearformen auf } V^* \ \}.$$

3. *Sei $V = k^4$. Folgern Sie aus der Existenz einer Basis so, dass eine gegebene alternierende Bilinearform eine der Gestalten*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

   hat, dass jedes Element $x \in \Lambda^2(k^4)$ von der Form $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$, $v_i \in k^4$ ist.

4. *Beweisen Sie: $x \in \Lambda^2(k^4)$ ist genau dann von der Form $v_1 \wedge v_2$ für $v_1, v_2 \in k^4$ falls $x \wedge x = 0$ in $\Lambda^4(k^4)$. Beachten Sie: $\Lambda^4(k^4)$ ist eindimensional, erzeugt von $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$.*

5. *Beschreiben Sie die Gleichung $x \wedge x = 0$ explizit in Koordinaten. Sie wird* **Plückerrelation** *genannt.*

6. *Folgern Sie, dass das Bild von φ die projektive Varietät in $\mathbb{P}^5_k$ ist, welche durch die Plückerrelation gegeben ist.*

(8 Punkte)