"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2014 — Übungsblatt 0

Ausgabe: Präsensaufgaben, **Abgabe:**

Aufgabe 0.1: Sind die folgenden Zahlen ganz über $\mathbb{Z}$?

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \qquad \frac{3+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}} \qquad \frac{3+2\rho}{1+\rho}$$

mit $\rho = e^{2\pi i/3}$.

Aufgabe 0.2: Sei R ein Ring, G eine endliche Gruppe von Ringautomorphismen von R. Bezeichne

$$R^G = \{x \in R | \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

den Unterring der G-Invarianten. Zeigen Sie, dass R ganz über R^G ist.
Hinweis: Betrachten Sie für $x \in R$ das Polynom $P(T) = \prod_{\sigma \in G}(T - \sigma(x))$.

Aufgabe 0.3: Sei $\rho = e^{2\pi/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeigen Sie: Der Ring

$$\mathbb{Z}[\rho] = \{a + b\rho | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ist ein Hauptidealring. Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$N : \mathbb{Q}(\rho) \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^{>0}$$

mit $N(x) = x\bar{x}$ und gehen Sie wie folgt vor:

1. N ist multiplikativ.
2. Für alle $a \in \mathbb{Z}[\rho] \setminus \{0\}$ ist $N(a) \in \mathbb{N}$.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}\rho]$ mit $a \neq 0$ existieren $q, r \in \mathbb{Z}[\rho]$, so dass $b = aq + r$ und $N(r) < N(a)$ gelten. (Division mit Rest)
4. Folgern Sie daraus die Behauptung.

Aufgabe 0.4: Sei $M \subset \mathbb{Z}^3$ die Untergruppe erzeugt von $(2, 1, 0)$ und $(1, 6, 2)$. Bestimmen Sie die Elementarteiler und eine Elementarteilerbasis.