“Algebraische Zahlentheorie”
SS 2014 — Übungsblatt 10

Ausgabe: 15.07.14, **Abgabe:** 22.07.14

Aufgabe 10.1: Sei k algebraisch abgeschlossen, $K = k(t)$ der Quotientenkörper von $k[t]$. Zeigen Sie:

1. Zu jedem Punkt $a \in k$ gehört eine diskrete Bewertung ord_a auf K.
2. Die Komplettierung von K bezüglich ord_a ist isomorph zum Körper $k((t))$ der formalen Laurent-Reihen, dem Quotientenkörper des Potenzreihenrings $k[[t]]$.
3. Es gibt eine weitere diskrete Bewertung, die zum Punkt im Undlichen gehört. Wie sieht sie aus?

(8 Punkte)

Aufgabe 10.2: Zeigen Sie, dass jedes Element von $\mathbb{Q}_p$ in der Form

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ $0 \leq a_i < p$ geschrieben werden kann. Dabei ist die Folge der a_i eindeutig.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3: Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathbb{Z}_7$ hat, indem Sie die Existenz einer Folge von Lösungen modulo 7^n zeigen. Geben Sie die ersten drei Terme der beiden Lösungen an.

(4 Punkte)