"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2014 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 20.05.14, **Abgabe:** 27.05.14

Aufgabe 3.1: Berechnen Sie für $d = 3$ und $d = 5$:

1. Die Diskriminante $D(1, \sqrt{d})$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$.
2. Die duale Basis zu y_1, y_2 zu $1, \sqrt{d}$.
3. Den Index $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subset \langle y_1, y_2 \rangle$.
4. Berechnen Sie die Diskriminante des Ganzheitsring.

(12 Punkte)

Aufgabe 3.2: Sei L/K eine endliche Körpererweiterung der Charakteristik $p > 0$, $a \in L$. Zeigen Sie: $\mathrm{tr}_{L/K}(a^p) = \mathrm{tr}_{L/K}(a)^p$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3: Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ein Zahlkörper vom Grad n. Zeigen Sie: Die Diskriminante $D(1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1})$ ist durch den Ausdruck

$$\prod_{i<j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta))^2$$

gegeben, wobei $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : K \to \bar{\mathbb{Q}}$ die verschiedenen Einbetttungen von K nach $\bar{\mathbb{Q}}$ durchläuft.
Hinweis: Vandermonde-Matrizen

(4 Punkte)

Aufgabe 3.4: Sei k ein Körper der Charakteristik ungleich 2

1. (hyperbolische Ebene) Sei $V = k^2$ mit der bilinearen Form $(v, w) = v^t A w$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: Die Form ist nicht-degeneriert und es gibt zwei linear unabhängige isotrope Vektoren, d.h. Elemente mit $(v, v) = 0$.
2. Sei W endlich dimensionaler k-Vektorraum mit einer symmetrischen nichtdegenierten bilinearen Form ϕ. Sei $w \in W$ isotrop. Zeigen Sie: Es gibt $w' \in W$, so dass $\langle w, w' \rangle$ mit der Einschränkung von B eine hyperbolische Ebene ist, d.h. die Matrix von ϕ bezüglich w, w' ist A.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.5: * Sei L/K endliche Körpererweiterung. Zeigen Sei: L/K ist genau dann separabel, wenn die Spurpaarung für L/K nicht degeneriert ist.

(4 Punkte)