“Algebraische Zahlentheorie”
SS 2014 — Übungsblatt 4

Ausgabe: 27.05.14, **Abgabe:** 03.06.14

Aufgabe 4.1: Sei R ein Dedekindring und $\mathfrak{a}$, , $\mathfrak{c}$ ganze Ideale von R. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) \ , \qquad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und $\mathfrak{m} = (2, \sqrt{-5} + 1) \subset \mathcal{O}_K$. Geben Sie eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{m}^{-1}$ an.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Geben Sie die Primidealfaktorisierung der Ideale (7) und (31) in $\mathcal{O}_K$ an. Dabei dürfen Sie annehmen, dass $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2)$ eine Basis von $\mathcal{O}_K$ ist. Erläutern Sie, wo diese Vorraussetzung benutzt wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Sei R ein lokaler Dedekindring, d.h. er hat genau ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealring ist.
Bemerkung: Diese Ringe heißen *diskrete Bewertungsringe*

(4 Punkte)

Aufgabe 4.5: * Sei k ein Körper, $R = k[[t]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Zeigen Sie:

1. Eine Potenzreihe ist genau dann invertierbar, wenn ihr konstanter Term ungleich 0 ist.
2. R ist lokal mit maximalem Ideal erzeugt von t.
3. R ist ein diskreter Bewertungsring.

(6 Punkte)