"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2014 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 03.06.14, **Abgabe:** 17.06.14

Aufgabe 5.1:

1. Formulieren Sie das Gaußsche Reziprozitätsgesetz (mit Quellenangabe).
2. Ist (2311) prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{1965}]$? Begründen Sie Ihre Rechnung.

(6 Punkte)

Aufgabe 5.2:

1. Sei L/K Erweiterung von Zahlkörpern. Sei $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_L$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die Idealnorm $N(\mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_K)$ ein Teiler von $N(\mathfrak{a})$ ist.
2. Benutzen Sie dies, um alle Ideale in $\mathbb{Z}[\sqrt{43}]$ zu bestimmen, die Norm höchstens 7 haben.

(6 Punkte)

Aufgabe 5.3: Sei $H \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe, die nicht diskret ist. Zeigen Sie, dass H dicht ist, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $(x_i)_{i \geq 1}$ in H, die gegen x konvergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.4: Ein Ring heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette von Idealen $I_1 \supset I_2 \supset I_2 \supset \ldots$ stationär wird. Sei nun A ein Dedekindring, $I \subset R$ ein Ideal ungleich 0. Zeigen Sie, dass R/I artinsch ist.

(4 Punkte)