

“Algebraische Zahlentheorie”

SS 2014 — Übungsblatt 6

Ausgabe: 17.06.14, Abgabe: 24.06.14

Aufgabe 6.1: Sei K ein Zahlkörper. Zeigen Sie, dass \mathcal{O}_K unendlich viele Primideale hat.

(2 Punkte)

Aufgabe 6.2: Zeigen Sie, dass die Gleichung $a^2 - 47b^2 = \pm 19$ Lösungen in ganzen Zahlen hat. Betrachten Sie dazu den Ganzheitsring von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{47})$:

1. Geben Sie die Minkowski-Schranke für \mathcal{O}_K an und bestimmen Sie alle Ideale von \mathcal{O}_K , deren Norm unterhalb der Minkowski-Schranke liegt.
2. Folgern Sie aus 1., dass die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{47})$ gleich 1 ist, indem Sie ein Element mit der Norm 2 finden.
3. Geben Sie die Primidealfaktorisierung von (19) in \mathcal{O}_K an.
4. Folgern Sie aus 2. und 3., dass in \mathcal{O}_K ein Element mit der Norm ± 19 existieren muss. Wie erhält man die Lösungen der Ausgangsgleichung?

(12 Punkte)

Bonus-Aufgabe 6.3: Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 + 5 = y^3$ keine ganzzahligen Lösungen hat.

Hinweis: Die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ hat keine 3-Torsion, der Rest sind Teilbarkeitsargumente in $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. (8 Punkte)