“Algebraische Zahlentheorie”
SS 2014 — Übungsblatt 8

Ausgabe: 01.07.14, **Abgabe:** 08.07.14

Aufgabe 8.1: Sei L/K Erweiterung von Zahlkörper, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale von $\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie: $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_K = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}|\mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a}\mathcal{O}_L|\mathfrak{b}\mathcal{O}_L$.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2:

1. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus von Dedekindringen. Zeigen Sie, dass ϕ einen Homomorphismus von Klassengruppen $\mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(B)$ induziert.
2. Sei L/K Galoiserweiterung von Zahlkörpern. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ vermittels der Homomorphismen aus 1. auf der Klassengruppe $\mathrm{Cl}(L)$ operiert.
3. In der Situation von 2. Zeigen Sie, dass die Elemente im Bild von $\mathrm{Cl}(K) \to \mathrm{Cl}(L)$ invariant unter der Operation sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 8.3: Sei R ein Dedekindring. Ein endlich erzeugter R-Modul heißt *lokal frei vom Rang* n, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ der Modul $M_\mathfrak{m}$ ein freier $R_\mathfrak{m}$-Modul vom Rang n ist. Lokal freie Moduln vom Rang 1 heißen *invertierbar*.
Zeigen Sie, dass die gebrochenen Ideale invertierbare Moduln sind.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.4: (Fortsetzung von 8.3)

1. Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt $(\cdot \otimes_R \cdot)$ auf den Isomorphieklassen von invertierbaren Moduln eine Gruppenstruktur induziert. Die Gruppe heißt *Picard-Gruppe* von R und wird $\mathrm{Pic}(R)$ bezeichnet.
2. Zeigen Sie, dass die Zuordnung aus 1. einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Cl}(R) \to \mathrm{Pic}(R)$ liefert.
3. Zeigen Sie, dass der Homomorphismus ein Isomorphismus ist.

(12 Punkte)