"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2014 — Übungsblatt 9

Ausgabe: 08.07.14, **Abgabe:** 15.07.14

Aufgabe 9.1: Zeigen Sie, dass jeder Zahlkörper vom Grad $2k+1$ über $\mathbb{Q}$ nur die Einheitswurzeln ± 1 besitzt.

(2 Punkte)

Aufgabe 9.2: Sei p ungerade Primzahl, $K = \mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_p)/K$ quadratisch ist, indem Sie das Minimalpolynom von ζ_p angeben.
2. Zeigen Sie, dass $K/\mathbb{Q}$ total reell ist, d.h. $r_2 = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3: Sei p Primzahl.

1. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_q$ eine primitive p-te Einheitswurzel existiert, wenn $q \equiv 1 \mod p$.
2. Sei $(q) \subset \mathbb{Z}$ Primideal, n eine natürliche Zahl mit $q \nmid n$. Die Primidealfaktorisierung von (q) in $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ sei
$$(q) = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_i^{e_i}$$
Benutzen Sie Teil 1., um g, e_i und f_i in Abhängigkeit von q zu bestimmen.
3. Wie viele Primfaktoren hat (71) in $\mathbb{Q}(\zeta_{20})$?
4. Für welche n ist (59) zerlegt in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$?

(10 Punkte)