"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2014 — Übungsblatt 1

Ausgabe: 01.05.2014, **Abgabe:** 08.05.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^3$ gegeben durch $Y = \{[t, t^2, t^3] \in \mathbb{A}^3 \mid t \in k\}$. Zeigen Sie, dass Y eine affine Varietät ist und dass $\mathcal{O}(Y) \cong k[t]$ in natürlicher Weise.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2: Skizzieren Sie graphisch das reelle Bild der folgenden Varietäten im $\mathbb{A}^2$:

$$(i)\ V(x^3 + y^3 - 1) \qquad (ii)\ V(x^4 + y^4 - 1) \qquad (iii)\ V(x^2 - x - xy + y)$$
$$(iv)\ V(x^2 + y^2 - 1, x - y)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 1.3: Für die folgenden Mengen $S \subset \mathbb{C}[x, y]$ von Polynomen, geben Sie jeweils einen Punkt in $V(S)$ an, oder kombinieren Sie die 1 aus den Polynomen in S.

1. $S = \{x^2 + y^2 - 1, y - 5\}$.
2. $S = \{x^2 + y^2 - 1, x - 1, y - 1\}$.
3. $S = \{x^2 - y^2 - 1, x + y\}$.
4. $S = \{x + y, x - 1, y - 1\}$.
5. $S = \{x^2 - y^3 - 1, x - 3\}$.
6. $S = \{x^2 - y^2, x^2 - xy\}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 1.4: Sei k ein Körper und sei $\phi : k[x] \to k[y]$ ein Ringhomomorphismus. Unter welchen Bedingungen ist ϕ ein Isomorphismus? (Mit Beweis)

(4 Punkte)