“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2014 — Übungsblatt 10

Ausgabe: 18.07.2014, **Abgabe:** 25.07.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Beweisen Sie den Austauschsatz für algebraisch unabhängige Elemente: Sei $K|k$ eine Körpererweiterung und $f_1, \dots, f_n$ eine Transzendenzbasis von K über k, sowie $e_1, \dots, e_l \in K$ algebraisch unabhängig über k. Zeigen Sie:

1. Proposition 3.5.1: Es gilt $l \leq n$, und man kann gewisse l Elemente unter den $f_1, \dots, f_n$ durch $e_1, \dots, e_l$ ersetzen und erhält wieder eine Transzendenzbasis.

2. Korollar 3.2.5.

Hinweis zu 1.: Dies ist analog zum Steinitzschen Austauschsatz in der linearen Algebra. Gehen Sie durch Induktion nach l vor. Für $l = 1$ muss die Menge $f_1, \dots, f_n, e_1$ algebraisch abhängig sein. Entfernen Sie dann ein geeignetes der f_i und zeigen Sie, dass man wieder eine Transzendenzbasis hat. Dazu müssen Sie folgendes benutzen: Falls $F|L$ und $L|K$ algebraische Körpererweiterungen sind, dann ist auch $F|K$ algebraisch.

(8 Punkte)

Aufgabe 10.2: Beweisen Sie: Faktoriell (siehe Definition 3.5.3) impliziert ganz-abgeschlossen (siehe Definition 3.4.5).

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3: Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Ring kommutativen R gilt:

$$\dim(R) = \max\{\dim(R_\wp) \mid \wp \subset R \text{ Primideal}\}.$$

Mit dim ist hier die Krulldimension gemeint.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 10.4: Beweisen Sie Proposition 2.4.1.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.5: Beweisen Sie Proposition 2.4.2.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.6: Sei R ein kommutativer Ring, und $f : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv bzw. surjektiv ist, wenn für alle Primideale $\wp \subseteq R$ der induzierte Homomorphismus $f_\wp : M_\wp \to N_\wp$ injektiv bzw. surjektiv ist.
Hinweis: Benutzen Sie Proposition 2.4.1 und Proposition 2.4.2.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.7: Gegenbeispiel für "Going Down". Betrachte den Teilring

$$R := \{f \in k[x, y] \mid f(1, 0) = f(0, 0)\} \subset k[x, y].$$

Beweisen Sie:

1. $R = k[x^2 - x, x^3 - x^2, y, xy]$.
2. Da R nach 1. eine e.e. k-Algebra ist, beschreibt die Inklusion $R \to k[x, y]$ einen Morphismus von irreduziblen Varietäten $\varphi : \mathbb{A}^2 \to W$. Beweisen Sie, dass dieser einen Isomorphismus von (quasi-affinen) Varietäten
$$\mathbb{A}^2 \setminus \{[1, 0], [0, 0]\} \to W \setminus \{\varphi([0, 0])\}$$
induziert. Ausserdem gilt $\varphi([0, 0]) = \varphi([1, 0])$. Machen Sie eine skizzenhafte Zeichnung der Situation.
3. Die Inklusion $R \to k[x, y]$ ist eine endliche Ringerweiterung.
4. R ist nicht ganz-abgeschlossen.
5. Seien $\mathfrak{p} = I(\varphi([0, 0])) \supsetneq \mathfrak{q} = I(\varphi(V(x)))$ und $P = I([1, 0])$. Dann gilt $\Phi^{-1}(P) = \mathfrak{p}$ aber es gibt kein Primideal Q von $k[x, y]$ mit $P \supset Q$ und $\Phi^{-1}(P) = \mathfrak{q}$. Mit anderen Worten: Der "Going down"-Satz kann für $R \to k[x, y]$ nicht gelten.

(12 Punkte)