"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2014 — Übungsblatt 2

Ausgabe: 08.05.2014, **Abgabe:** Freitag 16.05.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Welche der folgenden Teilmengen sind Ideale? (Mit Begründung)

(i) Die Menge $k[x]$ im Ring $k[x, y]$.

(ii) Die Menge $\{f(x, y) \in k[x, y] \mid f(x, 0) = f(0, y) = 0\}$ in $k[x, y]$.

(iii) Die Menge $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \nmid n\}$ im Ring $\mathbb{Z}$.

(iv) Sei R ein kommutativer Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, $S \subseteq R$ ein Teilring. Ist $S \cap I$ ein Ideal in S? Ist $S \cap I$ ein Ideal in R?

(5 Punkte)

Aufgabe 2.2: In der Vorlesung werden wir sehen, dass im Ring $R = k[x, y]$ (Polynomring in 2 Variablen) jedes Ideal endlich erzeugt ist. Zeigen Sie jedoch, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$, das Ideal

$$(x, y)^N = \{p \in k[x, y] \mid \text{alle Monome in } p \text{ haben Grad} \geq N\}$$

nicht durch $< N + 1$ Elemente erzeugt werden kann.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3: Beweisen Sie, dass das Ideal $(x + y^2, y + x^2 + 2xy^2 + y^4)$ in $\mathbb{C}[x, y]$ maximal ist.

(2 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 2.4: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien I_1 und I_2 Ideale von $k[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie:

1. $V(I_1) \cap V(I_2) = V(I_1 + I_2)$.

2. $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2)$.

3. Gleichung 1. verallgemeinert sich auf unendliche Schnitte:

$$\bigcap_{i \in I} V(I_i) = V((I_i)_{i \in I}),$$

   hierbei ist I ein beliebige Indexmenge, die $I_i, i \in I$ sind Ideale von $k[x_1, \ldots, x_n]$, und $(I_i)_{i \in I}$ ist das Ideal, welches von allen Elementen der I_i erzeugt wird.

4. Gleichung 2. verallgemeinert sich *nicht* auf unendliche Vereinigungen. Geben Sie ein Gegenbeispiel.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 2.5: Sei R ein kommutativer Ring.

1. Das Radikal des Nullideals (0) von R nennt man auch das **Nilradikal** $\mathrm{Nil}(R)$. Sei I ein Ideal von R. Beweisen Sie, dass $p^{-1}(\mathrm{Nil}(R/I)) = \sqrt{I}$, wobei p die Projektion $R \to R/I$ ist.

2. Der Schnitt aller *maximalen* Ideale von R heisst das **Jacobsonradikal** $\mathrm{Jac}(R)$. Beweisen Sie: $\mathrm{Nil}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(R)$.

3. Beweisen Sie:

$$\mathrm{Jac}(R) = \{x \in R \mid 1 - xy \text{ invertierbar für alle } y \in R\}.$$

(6 Punkte)