"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2014 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 16.05.2014, **Abgabe:** 23.05.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Bestimmen Sie zum Ideal

$$I = (2X^2 + 2X, 3X^2 - 3X, 30X + 30)$$

in $\mathbb{Z}[X]$ die im Beweis des Hilbertschen Basissatzes konstruierte Idealkette

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset \mathbb{Z},$$

und das zugehörige Erzeugendensystem von I. Schreiben Sie die drei ursprünglich gegebenen Erzeuger als Linearkombination von Elementen des so bestimmten Erzeugendensystemes.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Bestimmen Sie alle Ideale in den Ringen $\mathbb{Z}$ und $k[x]$ (für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k). Unter welchen Bedingungen handelt es sich um ein Radikalideal, Primideal, oder maximales Ideal?

(2 Punkte)

Aufgabe 3.3: Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie:

1. Falls X irreduzibel ist, so sind alle nicht-leeren offenen Teilmengen dicht in X.
2. Falls $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $Y \subseteq U$ eine in U abgeschlossene Teilmenge ist, dann gilt
$$\overline{Y} \cap U = Y.$$
(Mit $\overline{Y}$ ist hier der Abschluss in X gemeint.)
3. Falls $V \subset X$ eine Teilmenge und $X = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung, so gilt
$$V \cap U_i \text{ abgeschlossen in } U_i \text{ für alle } i \;\Rightarrow\; V \text{ abgeschlossen.}$$

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 3.4: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beweisen Sie, dass

$$V(x^2 - yz, xz - x) \subset \mathbb{A}_k^3$$

eine Vereinigung von 3 irreduziblen Komponenten ist und finden Sie die entsprechenden Primideale.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.5: Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann noethersch ist, wenn alle offenen Teilmengen quasi-kompakt in der induzierten Topologie (Einschränkung) sind.

(4 Punkte)