“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2014 — Übungsblatt 4

Ausgabe: 23.05.2014, **Abgabe:** 30.05.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Sei $V = V(x_1^2 + x_2 + 1) \subset \mathbb{A}^2$. Betrachten Sie den Abschluss $W = \overline{\varphi_0(V)} \subset \mathbb{P}^2$, und bestimmen Sie das zugehörige homogene Ideal $I(W)$. Geben Sie jeweils die Gleichungen für die “affinen Teilmengen” $\varphi_i^{-1}(W), i = 0, 1, 2$ an. Zeichnen Sie die reellen Bilder der entsprechenden Kurven.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Berechnen Sie die projektiven Abschlüsse $W = \overline{\varphi_0(V)}$ der folgenden affinen Varietäten, indem Sie das homogene Ideal $I(W)$ angeben.

$$V(x_1^7 + x_2^5 + x_3) \subset \mathbb{A}^3 \qquad V(x_1^7 - x_2^2, x_1^7 + x_3^2) \subset \mathbb{A}^3$$

$$V(x_1) \subset \mathbb{A}^1 \qquad V(x_1x_2, x_2x_3) \subset \mathbb{A}^3$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei R ein graduierter Ring und $I \subset R$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie: I ist genau dann prim, wenn für *homogene Elemente* $f, g \in R$ gilt:

$$fg \in I \Rightarrow f \in I \text{ oder } g \in I.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Sei $V \subset \mathbb{P}^n$ abgeschlossen. Beweisen Sie: V ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ prim ist.
Hinweis: Imitieren Sie den Beweis im affinen und verwenden Sie Aufgabe 4.3.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.5: Sei in dieser Aufgabe $k = \mathbb{C}$. Die Menge $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist als Quotient von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit der Quotiententopologie der natürlichen Topologie auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ausgestattet. Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ mit dieser Topologie kompakt ist.

(4 Punkte)