“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2014 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 30.05.2014, **Abgabe:** 06.06.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Bonus-Aufgabe 5.1: Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{L \subset k^4 \mid L \text{ zweidimensionaler Unterraum}\}$$

eine natürliche Struktur einer projektiven Varietät eingebettet in $\mathbb{P}^5_k$ besitzt. Diese Menge kann auch als die Menge der “projektiven Geraden” im $\mathbb{P}^3_k$ aufgefasst werden.
Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

1. *Rufen Sie sich die Definition des äusseren Produktes $\Lambda^k V$ eines Vektorraumes V in Erinnerung. Beweisen Sie, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : \{L \subset k^4 \mid L \textit{ zweidimensionaler Unterraum}\} &\to \mathbb{P}^5_k \cong \mathbb{P}(\Lambda^2 k^4) \\ L = < v, w > &\mapsto v \wedge w \end{aligned}$$

   wohldefiniert und injektiv ist.

2. *Konstruieren Sie einen Isomorphismus*

$$\Lambda^2 V \xrightarrow{\sim} \{ \textit{ alternierende Bilinearformen auf } V^* \}.$$

3. *Sei $V = k^4$. Folgern Sie aus der Existenz einer Basis so, dass eine gegebene alternierende Bilinearform eine der Gestalten*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

   hat, dass jedes Element $x \in \Lambda^2(k^4)$ von der Form $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$, $v_i \in k^4$ ist.

4. *Beweisen Sie: $x \in \Lambda^2(k^4)$ ist genau dann von der Form $v_1 \wedge v_2$ für $v_1, v_2 \in k^4$ falls $x \wedge x = 0$ in $\Lambda^4(k^4)$. Beachten Sie: $\Lambda^4(k^4)$ ist eindimensional, erzeugt von $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$.*

5. *Beschreiben Sie die Gleichung* $x \wedge x = 0$ *explizit in Koordinaten. Sie wird* **Plückerrelation** *genannt.*

6. *Folgern Sie, dass das Bild von* φ *die projektive Varietät in* $\mathbb{P}^5_k$ *ist, welche durch die Plückerrelation gegeben ist.*

(8 Punkte)