"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2014 — Übungsblatt 6

Ausgabe: 06.06.2014, **Abgabe:** 20.06.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: Sei R ein kommutativer Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Beweisen Sie über die Konstruktion der Äquivalenzklassen $R[S^{-1}]$ **zwei** der folgenden Aussagen:

1. Die Zuordnung $\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} := \frac{fg'+f'g}{gg'}$ ist wohldefiniert (d.h. nicht von der Wahl der Vertreter abhängig).
2. Die Zuordnung $\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} := \frac{ff'}{gg'}$ ist wohldefiniert (d.h. nicht von der Wahl der Vertreter abhängig).
3. "$\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'}$" definiert die Struktur einer abelschen Gruppe auf $R[S^{-1}]$ mit $\frac{0}{1}$ als neutralem Element.
4. "$\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'}$" definiert die Struktur eines abelschen Monoides auf $R[S^{-1}]$ mit $\frac{1}{1}$ als neutralem Element (d.h. erfüllt alle Axiome einer abelschen Gruppe, bis auf die Existenz der Inversen).
5. Die Zuordnungen $\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'}$ und $\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'}$ erfüllen das Distributivgesetz und die Abbildung $\iota : R \to R[S^{-1}]$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus. *Hier dürfen Sie natürlich 1.-4. annehmen.*

(4 Punkte)

Aufgabe 6.2: Sei R ein kommutativer Ring, $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und $\iota : R \to R[S^{-1}]$ die Lokalisierung von R bei S. Beweisen Sie (siehe Proposition 1.9.6):
Die Zuordnung $J \mapsto \iota^{-1}(J)$ und $I \mapsto I[S^{-1}]$ sind zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Primideale J von $R[S^{-1}]$ und der Menge der Primideale I von R mit der Eigenschaft $I \cap S = \emptyset$.
Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel dafür, dass die Aussage falsch wird, wenn man "Primideal" durch "maximales Ideal" oder "Ideal" ersetzt.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 6.3: Sei R ein kommutativer Ring, $f \in R$, f nicht nilpotent. Sei $S = \{1, f, f^2, f^3, \dots\}$. Beweisen Sie:

$$R[S^{-1}] \cong R[X]/(fX - 1).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 6.4: Sei R eine kommutativer Ring und $\wp \subset R$ ein Primideal. Der Ring $R_\wp = R[S_\wp^{-1}]$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \wp[S_\wp^{-1}]$. Beweisen Sie, dass der Restklassenkörper natürlich isomorph zum Quotientenkörper des Quotientenringes $R/\wp$ ist, d.h.

$$R_\wp/\mathfrak{m} \cong \mathrm{Quot}(R/\wp).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 6.5: Sei $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ ein graduierter kommutativer Ring und sei $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge von *homogenen* Elementen. Beweisen Sie, dass $R[S^{-1}]$ in natürlicher Weise graduiert ist (siehe 1.9.10).

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 6.6: Sei k ein Körper. Betrachten Sie den Ring der formalen Potenzreihen

$$k[\![X]\!] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \;\middle|\; a_i \in k \right\}.$$

Zwei formale Potenzreihen werden koeffizientenweise addiert und die Multiplikation erfolgt durch Ausmultiplizieren. Genauer:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) := \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i,$$

mit $c_i = \sum_{n+m=i} a_n b_m$. Beweisen Sie:

1. Eine formale Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_0 \neq 0$.

2. Der Ring $k[\![X]\!]$ ist lokal mit maximalem Ideal (X) und Restklassenkörper k.

(4 Punkte)