“Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie” SS 2014 — Übungsblatt 7

Ausgabe: 20.06.2014, **Abgabe:** 27.06.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Seien $V \subset \mathbb{A}^m$ und $W \subset \mathbb{A}^n$ quasi-affine Varietäten, d.h. V und W sind offen in ihrem Abschluss $\overline{V}$ bzw. $\overline{W}$. Beweisen Sie: Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ ist genau dann ein Morphismus von Varietäten, falls $h_1, \ldots, h_k \in \mathcal{O}(\overline{V})$ existieren, so dass $V = \bigcup_i U_{h_i}$ und für alle i gilt: Es existieren $g_{1,i}, \ldots, g_{n,i} \in \mathcal{O}(\overline{V})$ mit

$$\varphi(\lambda) = [\frac{g_{1,i}(\lambda)}{h_i(\lambda)}, \ldots, \frac{g_{n,i}(\lambda)}{h_i(\lambda)}]$$

für alle $\lambda \in U_{h_i}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei $V = V(x^2 + y^2 - 1)$. Sei f die auf $U_1 = V \setminus \{[1,0],[0,1]\}$ definierte Funktion $\frac{xy}{x+y-1}$. Sei g die auf $U_2 = V \setminus \{[-1,0],[0,-1]\}$ definierte Funktion $\frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1}$.

1. Beweisen Sie, dass für $P \in U_1 \cap U_2$ die Gleichung
$$f(P) = g(P)$$
erfüllt ist.

2. Nach Definition ist also die Funktion
$$h(P) := \begin{cases} f(P) & P \in U_1, \\ g(P) & P \in U_2, \end{cases}$$
regulär auf $V = U_1 \cup U_2$. Aus Proposition 1.10.1 folgt daher, dass
$$h \in \mathcal{O}(V) = k[x,y]/(x^2 + y^2 - 1).$$
Finden Sie ein repräsentierendes Polynom.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3: Betrachten Sie den Morphismus von Varietäten (siehe Beispiel 1.2.6):

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^1 & \to & V(x^2 - y^3) \\ [t] & \mapsto & [t^3, t^2] \end{array}$$

Beweisen Sie, dass die Einschränkung

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{[0]\} \to V(x^2 - y^3) \setminus \{[0, 0]\}$$

ein Isomorphismus von Varietäten ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4: Nehme Sie für diese Aufgabe an, dass $\mathrm{Char}(k) \neq 2$. Betrachten Sie die Abbildung "Projektion aus dem Nordpol" (siehe Beispiel 1.2.7):

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{A}^1 \setminus \{[i], [-i]\} & \to & V(x^2 + y^2 - 1) \setminus \{[0, 1]\} \\ [t] & \mapsto & [\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}] \end{array}$$

1. Beweisen Sie, dass die Abbildung φ ein Isomorphismus von (quasi-affinen) Varietäten ist.
2. Wir haben $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ und $V(x^2+y^2-1) \subset PV(X^2+Y^2-Z^2)$. Beweisen Sie, dass φ sich zu einem Isomorphismus von projektiven Varietäten

   $$\mathbb{P}^1 \to PV(X^2 + Y^2 - Z^2)$$

   fortsetzt. Wie werden die im affinen Bild fehlenden 3 Punkte identifiziert?
3. Es gibt einen Morphismus (Veronese Einbettung)

   $$\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$$

   welcher in homogenen Koordinaten durch

   $$[\mu_0, \mu_1] \mapsto [\mu_0^2, \mu_0\mu_1, \mu_1^2]$$

   gegeben wird. Beweisen Sie, dass dieser (bis auf einen linearen Koordinatenwechsel im $\mathbb{P}^2$) genau den Isomorphismus aus 2. induziert.

(10 Punkte)