"Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie" SS 2014 — Übungsblatt 8

Ausgabe: 27.06.2014, **Abgabe:** 04.07.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss14/kommalg.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Ein nullteilerfreier Ring R heisst **euklidisch**, falls eine Bewertungsfunktion $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ existiert, mit den Eigenschaften

1. *(Division mit Rest)* für alle $b, a \in R$ mit $a \neq 0$ existieren $q, r \in R$ so, dass $b = qa + r$ und entweder $r = 0$ oder $\nu(r) < \nu(a)$.
2. für $b, a \in R \setminus \{0\}$ gilt $\nu(ab) \geq \nu(a)$.

(z.B. sind $\mathbb{Z}$ und $k[x]$ euklidische Ringe).
Zeigen Sie: In einem euklidischen Ring kann das Diagonalisierungsverfahren zur Bestimmung der Elementarteiler (Satz 2.5.2) vereinfacht werden und P und Q können als Produkte von Elementarmatrizen geschrieben werden.
Hinweis: Statt der Gleichung $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & * \\ b & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & * \\ * & * \end{pmatrix}$ *wobei* $(x) = (a, b)$*, betrachte die Gleichung* $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & * \\ b & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & * \\ * & * \end{pmatrix}$ *für eine Division mit Rest* $b = qa + r$*. Die Begründung, dass der Algorithmus anhält, muss modifiziert werden unter Benutzung der Bewertungsfunktion.*

(6 Punkte)

Aufgabe 8.2: Bestimmen Sie die Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Welche Struktur hat die Gruppe $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^3$?

(3 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 8.3: Sei k ein Körper und A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus k. Wie in der Vorlesung machen wir k^n zu einem $k[x]$-Modul, indem x durch A operiert. Betrachte die Sequenz:

$$0 \longrightarrow k[x]^n \xrightarrow{xE_n - A} k[x]^n \xrightarrow{p} k^n \longrightarrow 0$$

gibt. Hier ist p durch die Vorschrift $p(f \cdot v) = f(A) \cdot v$ für $f \in k[x]$ und $v \in k^n$ gegeben. Wir betrachten dabei $k^n \subset k[x]^n$ auf die offensichtliche Weise. Beweisen Sie:

1. p ist wohldefiniert.
2. p ist ein $k[x]$-Modulhomomorphismus.
3. Die Sequenz ist exakt (also eine freie Präsentation von k^n).

(4 Punkte)

Aufgabe 8.4: Sei

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Struktur von $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}[x]$-Modul (indem x als S wirkt), indem Sie die Elementarteiler von $xE_3 - S$ bestimmen. Welche Jordansche Normalform hat S?

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.5: Sei R ein komm. Ring. Gegeben sei das folgende Diagramm von R-Modulhomomorphismen, in dem die beiden Zeilen exakte Sequenzen sind:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Wenn b und d Isomorphismen sind, a surjektiv und e injektiv ist, dann ist c ein Isomorphismus.

(6 Punkte)