Dr. F. Hörmann — Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie — Sommer 2014

Klausurbeispiel

Sie haben 2 Stunden Zeit. Alle Lösungen sind vollständig zu begrüngen (auch die Antworten im Multiple-Choice-Teil bitte kurz begründen). Sie dürfen ein DIN-A4-Blatt mit Notizen verwenden.
Dies ist ein Klausurbeispiel zur Übung; es gibt viel mehr Aufgaben als in der wirklichen Klausur. Ich empfehle Ihnen, zuerst zu lernen, sich dann erst dieses Klausurbeispiel anzuschauen, und danach zu versuchen es ohne im Skript nachzusehen zu lösen.

Die ersten beiden Aufgaben sind typische Wissensaufgaben. In der Klausur wird **eine** *von diesem Typ vorkommen. Es könnte aber auch nach Zusammenhängen gefragt werden, die nicht so eins zu eins in der Definition stehen. Wichtig ist, dass Sie die Aussagen gut verstanden haben.*

1. Formulieren Sie den Hilbertschen Nullstellensatz (starke Fassung).
2. Definieren Sie die Zariski-Topologie auf einer projektiven Varietät.
3. Geben Sie einen Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes in der Dimension 1.

Bitte wenden.

4. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Es gibt einen Punkt für jede richtig beantwortete Frage und einen Punkt für jede richtige Begründung. Lesen Sie sich alle Aussagen *sehr sorgfältig* durch.

	Wahr	**Falsch**
Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n$ ist gleich der induzierten Topologie bzgl. einer beliebigen der Einbettungen $\varphi_i : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Hierbei heisst eine Menge in $\mathbb{A}^n$ offen, genau dann, wenn sie Einschränkung einer offenen Menge aus $\mathbb{P}^n$ ist.	☐	☐
Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2$ ist gleich der Produkttopologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.	☐	☐
Der Schnitt von beliebig vielen affinen Varietäten in $\mathbb{A}^n$ ist wieder eine affine Varietät.	☐	☐
Jeder Morphismus von Varietäten bildet Zariski-offene Mengen in Zariski-offene Mengen ab.	☐	☐
Sei R ein kommutativer Ring und I, J zwei Ideale von R. Falls $I + J = R$ so gilt auch $I^n + J^m = R$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.	☐	☐

Bitte wenden.

Die nächsten Aufgaben sind gemischte Aufgaben. In der Klausur werden **zwei** *von diesem Typ vorkommen.*

5. Sei $V = V(x^2+xy) \subset \mathbb{A}^2$ und $W = V(xy+y^2) \subset \mathbb{A}^2$. Zerlegen Sie $V \cup W$ in irreduzible Komponenten, und geben Sie $I(V \cup W)$ an.

6. Sei $V_1 = V(x_1^2+x_2^2-1)$ der Kreis, $V_2 = V(x_1x_2-1)$ die Hyperbel, und $V_3 = V(x_1^2-x_2)$ die Parabel. Geben Sie die homogenen Gleichungen der Abschlüsse $\overline{V_i}, i = 1, \ldots, 3$ in $\mathbb{P}^2$ an (bzgl. der Einbettung $\varphi_0 : \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$). Beweisen Sie, dass alle $\overline{V_i}, i = 1, \ldots, 3$ zueinander isomorph sind.

7. Sei W eine affine Varietät. Beschreiben Sie einen Morphismus von affinen Varietäten $\varphi : V \to W$, welcher zu der Ringerweiterung $\Phi : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(W)[y] \cong \mathcal{O}(V)$ gehört, geometrisch. Dabei ist y eine Unbestimmte.

8. Sei k ein Körper der Charakteristik 0. Sei $S = \begin{pmatrix} x^2+x & x^2-x \\ x^2 & x \end{pmatrix}$ und betrachte den $k[x]$-Modul
$$M = k[x]^2/Sk[x]^2.$$
Er entspricht einem (endlich dimensionalen?) k-Vektorraum mit Endomorphismus γ. Geben Sie eine Matrix von γ an, in einer beliebigen Basis. (Geben Sie die Basis ebenfalls an!).

Die letzten beiden Aufgaben sind typische Beweisaufgaben. In der Klausur wird **eine** *von diesem Typ vorkommen.*

9. Sei R ein Hauptidealring und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Einträgen in R. Seien (d_1) und (d_2) die Elementarteiler von A (einschliesslich eventueller Nullen). Beweisen Sie:
$$(d_1) = (a, b, c, d) \qquad (d_2) = \left(\frac{ad-bc}{d_1}\right).$$

10. Sei R ein noetherscher lokaler Ring, so dass das maximale Ideal $\mathfrak{m} = (t)$ ein Hauptideal ist. Zeigen Sie:
    (a) Jedes Element $x \in R$, $x \neq 0$ lässt sich als $u \cdot t^k$, $u \in R$ invertierbar, $k \in \mathbb{N}_0$ schreiben.
    (b) Jedes Ideal ungleich 0 von R ist von der Form $\mathfrak{m}^k, k \in \mathbb{N}_0$.