Funktionentheorie
Sommersemester 2016

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 16. Juli 2016

Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!

Math. Institut
Eckerstr. 1
79104 Freiburg

0761-888 5495
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Einleitung

Funktionentheorie ist die Theorie der Differenzierbarkeit für Funktionen in einer komplexen Variablen. Wie wir sehen werden, verhält sich die Theorie ganz anders (letztlich einfacher) als die Theorie der Differenzierbarkeit im Reellen. Gleichzeitig ist sie sehr wichtig. Viele besonders wichtige Funktionen wie exp oder die trigonemetrischen Funktionen sind nicht nur reell, sondern auch komplex differenzierbar. Man versteht ihre Eigenschaft erst dann wirklich, wenn man diesen Aspekt berücksichtigt. Tatsächlich werden viele reelle Formeln (z.B. unbestimmte Integrale) auf dem Umweg über die komplexen Zahlen bewiesen.

Dreh- und Angelpunkt und unser erstes großes Ziel ist die *Cauchysche Integralformel.* Ist $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, mit $U \subset \mathbb{C}$ offen, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

für jede Kreisscheibe $B_r(z)$, deren Rand ebenfalls in U liegt.

Haben wir diese Formel erst einmal etabliert, können wir mit geringer Mühe die vielen Eigenschafte von komplex differenzierbaren Funktionen herleiten.

- Jede komplex differenzierbare Funktion ist unendlich oft differenzierbar.
- Komplex differenzierbare Funktionen sind lokal darstellbar durch eine konvergente Potenzreihe.
- Zwei komplex differenzierbare Funktionen, die auf einer Kreisscheibe übereistimmen (es reicht eine Menge mit Häufungspunkt), sind gleich.
- Nicht-konstante komplex differenzierbare Funktion ist offen, d.h. Bilder offener Mengen sind offen.

Hieraus folgt dann als besonderes Bonbon ein schneller Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Das nächste Ziel ist dann der *Residuensatz*, der es erlaubt sehr allgemeine Wegintegrale sehr effizient zu berechnen. Bei genauerem Hinsehen ist auch er eine Konsequenz der Cauchyschen Integralformel. Viele der Integralformeln in Formelsammlungen werden mit Hilfe des Residuensatzes gezeigt.

Am Ende des Semester sollte noch ein wenig Zeit sein für ein vertiefendes Kapitel, z.B. der Riemannsche Abbildungssatz oder die Theorie der elliptischen Funktionen.

Im Zugang zum Beweis der Integralformel gibt es zwei grundsätzlich Zugänge. Einerseits handelt es sich bei komplex differenzierbaren Funktionen und reell differenzierbare Funktionen im Sinne der Analysis 2. Zudem erfüllen sie eine Differentialgleichung. Mit der vollen Wucht der reellen Analysis erhält man die Formel als einfachen Spezialfall. Andererseits kann der Beweis direkt geführt werden. Er nimmt dann etwas mehr Raum ein, die Vorlesung setzt aber dann nur noch Analysis 1 voraus. Wie die meisten Funktionentheorievorlesungen werden wir diesen zweiten Zugang wählen.

Literatur

Es gibt eine Vielzahl von Büchern zum Thema. Für jeden Geschmack sollte etwas dabei sein. Hier eine Auswahl.

(i) Fischer, Lieb: Funktionentheorie, Viehweg. *Knapp, im Stil eines Vorlesungsskriptes gehalten. Eine Standardreferenz*

(ii) Jänich: Funktionentheorie, Springer Verlag. *Ähnlich. Die Theorie der analytischen Fortsetzung gefällt mir hier besser*

(iii) Ahlfors: Complex Analysis. McGraw Hill. *Englisch. Ausführlicher, mit viel Hintergrundinformationen z.B. über topologische Räume. Auch im Stoff viel umfangreicher, auch für eine FT II oder Folgeseminare geeignet*

(iv) Remmert: Funktionentheorie I, II, Springer Verlag. *Sehr ausführlich, mit vielen historischen Anmerkungen.*

Kapitel 1

Elementare Theorie der komplexen Differenzierbarkeit

Definition 1.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt* komplex differenzierbar*, wenn der Grenzwert*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Sie heißt holomorph *in z_0, wenn sie in einer offenen Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist. Sie heißt* holomorph*, wenn sie in ganz U komplex differenzierbar (und damit auch holomorph) ist. Sie heißt* ganz*, wenn sie holomorph auf $U = \mathbb{C}$ ist.*

Beim Rechnen mit Grenzwerten spielt nur die Struktur von $\mathbb{C}$ als metrischer oder topologischer Raum eine Rolle, also genau wie in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel. Die Funktion $z \mapsto z^2$ ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = 2z$. Es ist nämlich

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Lemma 1.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f, g : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $f + g$, λf komplex differenzierbar in z_0 mit*

(i) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$,

(ii) $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$,

(iii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

Ist zusätzlich $g(z_0) \neq 0$, so ist auch f/g komplex differenzierbar in z_0 mit *(iv)* $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to V$ und $g : V \to \mathbb{C}$ Funktionen. Sei f komplex differenzierbar in $z_0 \in U$ und g komplex differenzierbar in $g(z_0)$. Dann ist $g \circ f$ komplex differenzierbar in z_0 mit

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Beweis: Wie in Analysis 1. □

Insbesondere sind alle Polynomfunktionen ganz.
Wie in der reellen Analysis liefert die Ableitung eine optimale *lineare* Approximation der Funktion.

Satz 1.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann komplex differenzierbar in z_0, wenn es eine eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $\phi : U \to \mathbb{C}$ gibt mit*

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \phi(z)$$

wobei $\lim_{z\to z_0} \phi(z)/(z - z_0) = 0$. *In diesem Fall gilt* $a = f'(z_0)$.

Beweis: Der Beweis ist wörtlich derselbe wie in Analysis 1. Wir gehen das Argument durch. Angenommen, f hat die Darstellung wie im Satz. Dann gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\alpha(z - z_0) - \phi(z)}{z - z_0} = \alpha + 0.$$

Damit ist f komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung α.
Sei umgekehrt f differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0)$. Wir setzen $a = f'(z_0)$ und $\phi(z) = f(z) - f(z_0) - \alpha(z - 0)$. Dann gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \alpha(z - z_0}{z - z_0} = f'(z_0) - \alpha = 0.$$

□

Korollar 1.4. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in U$. Dann ist f stetig in z_0.*

Beweis: Zu zeigen ist $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Wir verwenden die lineare Approximation und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} (f(z) + a(z - z_0) + \phi(z)) = f(z_0) + \lim_{z\to z_0} a(z - z_0) + \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{\phi(z)}{z - z_0} \\ = f(z_0) + a \cdot 0 + 0 \cdot 0.\end{aligned}$$

□

Bei genauerem Hinsehen hat diese Rechnung benutzt, dass die komplexe Multiplikation

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (x+iy)(u+iv) \mapsto (xu - yv) + i(xv + yu)$$

stetig ist. Dies folgt aus der Stetigkeit der reellen Addition und Multiplikation, siehe Analysis 2.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Nun wollen wir komplexe Differenzierbarkeit mit der reellen Differenzierbarkeit vergleichen. Dafür fassen wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ auf. Wir schreiben $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Damit werden x und y zu Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset U$ ist *reell differenzierbar* in $z_0 \in U$, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt und eine Funktion $\psi : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \psi(z)$$

und

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\psi(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

Schreiben wir $f = u + iv$ mit $u, v : U \to \mathbb{R}$, so wissen wir, dass die lineare Abbildung A durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Wir vergleiche dies mit der Charakterisierung in Satz 1.3. Multiplikation mit einer komplexen Zahl $\alpha = a + ib$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Bezüglich unserer Koordinaten hat sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Der zweite Unterschied zwischen den Formeln ist unterschiedliche Formulierung der Grenzwerteigenschaft. Die Bedingungen stellen sich aber als äquivalent heraus, denn eine Folge in $\mathbb{R}^2$ konvergiert genau dann gegen 0, wenn die Folge ihrer Beträge gegen 0 konvergiert. Also:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \left| \frac{\phi(z)}{z - z_0} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{\phi(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

Satz 1.5. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f = u + iy : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $u, v : U \to \mathbb{R}$, $z_0 \in U$. Dann ist f genau dann komplex differenzierbar, wenn f reell* *differenzierbar ist und die* Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

erfüllt. Es gilt dann

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Beweis: Sei f komplex differenzierbar. Wir setzen $\alpha = f'(z_0)$. Sei A die zu α gehörige Matrix. Wir zeigen, dass A die totale Ableitung von f ist. Nach Satz 1.3 gilt

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \phi(z)$$

mit $\lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{z-z_0} = 0$. Wie in unserer Vorüberlegung ist dann auch $\lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{|z-z_0|} = 0$. Wir haben die Eigenschaft der totalen Ableitung verifiziert. Die Einträge von A sind die partiellen Ableitungen und erfüllen die Gleichungen wie im Satz.

Ist umgekehrt f reell differenzierbar und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt, so setzen wir $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Dann ist $\alpha(z - z_0) = A(z - z_0)$. Daher gilt

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \psi(z)$$

mit $\lim_{z\to z_0} \frac{\psi(z)}{|z-z_0|} = 0$. Hieraus folgt $\lim_{z\to z_0} \frac{\psi(z)}{z-z_0} = 0$. Damit ist f komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung α. $\square$

Wir schreiben oft abkürzend $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ etc.

Beispiel. Wir betrachten $\exp(x+iy) = \exp(x)(\cos(y)+i\sin(y))$, also $u(x, y) = \exp(x)\cos(y)$, $v(x, y) = \exp(x)\sin(y)$. Die Funktion ist reell differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{array}{ll} u_x = \exp(x)\cos(y) & u_y = -\exp(x)\sin(y) \\ v_x = \exp(x)\sin(y) & v_y = \exp(x)\cos(y) \end{array}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt, also ist exp holomorph auf $\mathbb{C}$ (d.h. ganz). Die Ableitung ist

$$\exp'(z) = \exp(z).$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $z \mapsto |z|$ mit $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $v = 0$. Also ist $v_x = v_y = 0$, aber $u_x, u_y \neq 0$. Die Funktion ist nicht holomorph. Wir halten fest, dass sie aber $\mathbb{R}$-linear ist.

Beispiel. Wir betrachten die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$. Hier gilt $u = x, v = -y$. Die totale Ableitung ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind verletzt. Die Funktion ist nicht holomorph. Man beachte, dass sie $\mathbb{R}$-linear ist, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

Sind u und v sogar zweimal stetig differenzierbar, so erhalten wir aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

$$u_{xx} = v_{yx}, u_{xy} = v_{yy}, u_{yx} = -v_{xy}, u_{yy} = -v_{xy}$$

und daraus

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy} \Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Definition 1.6. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ heißt* harmonisch, *wenn sie zweimal stetig partiell differentierbar ist und gilt*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind also harmonisch (sobald wir wissen, dass sie automatisch zweimal stetig differenzierbar ist.)
Oft schreibt man die Differentialgleichung in anderer Form.

Definition 1.7. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann setzen wir*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= u_x + iv_x \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= u_y + iv_y \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}(f_x - if_y) \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}(f_x + if_y)
\end{aligned}$$

Mit dieser Notation:

Korollar 1.8. *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind genau dann erfüllt, wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.*

Beweis: Wir setzen ein:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow f_x = if_y \Leftrightarrow u_x + iv_x = iv_y - v_x \Leftrightarrow u_x = v_y, v_x = -v_y$$

$\square$

Wir haben die partiellen Ableitungen nach z und $\overline{z}$ als formale Ausdrücke eingeführt. Tatsächlich haben sie eine Bedeutung.

Lemma 1.9. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann reell differenzierbar in z_0, wenn es komplexe Zahlen α und β gibt und eine Funktion $\phi : U \to \mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \beta(\overline{z} - \overline{z}_0) + \phi(z)$$

und $\lim_{z\to z_0} \phi(z)/|z - z_0| = 0$. *In diesem Fall gilt*

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \beta = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0).$$

Beweis: Es genügt den Fall einer $\mathbb{R}$-linearen $\mathbb{R}$-Abbildung $f = u+iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu betrachten und $z_0 = 0$. Sie bildet 1 ab auf $f_x = u_x + iv_x$ und i auf $f_y = u_y + iv_y$. Andererseits betrachten wir die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$z \mapsto f_z z + f_{\overline{z}}\overline{z}.$$

Sie bildet 1 ab auf

$$f_z + f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) + \frac{1}{2}(f_x + if_y) = f_x$$

und i auf

$$f_z i - f_{\overline{z}} i = i\frac{1}{2}(f_x - if_y) - i\frac{1}{2}(f_x + if_y) = f_y$$

Also stimmen die beiden linearen Abbildungen überein.

Aus der linearen Approximation in Satz 1.3 folgt also die behauptete Approximation. Dasselbe Argument lässt sich auch in die Gegenrichtung rechnen. □

Bemerkung. Konzeptionell sind $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ eine $\mathbb{R}$-Basies des *Tangentialraums* $T_{z_0}U$ von $U \subset \mathbb{C}$ als reelle Mannigfaltigkeit. Die Ausdrücke $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sind eine eine $\mathbb{C}$-Basis des *komplexifizierten Tangentialraums* $T_pU \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ der reellen Mannigfaltigkeit U. Der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial z}$ spannt den Tangentialraum der komplexen Mannigfaltigkeit U auf.

Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir erinnern uns, dass die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)$$

einen *Konvergenzradius* hat. Dies ist eine Zahl $0 \leq r \leq \infty$, so das die Reihe auf der Kreisscheibe $B_r(z_0)$ konviergiert und divergiert für $|z - z_0| > r$. Wir berechnen r als Kehrwert von

$$\limsup_{n\geq 0} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Die Konvergenz ist absolut und sogar gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $B_\theta(z_0)$ mit $\theta < r$. Wir haben in Analysis 1 gesehen, das hieraus folgt, dass f im reellen stetig ist und differenzierbar mit Ableitung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Die Ableitungsreihe hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe, da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beispiel. Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat Konvergenzradius ∞.

Die Beweise aus Analysis 1 funktionieren genauso auch im Komplexen. Wegen der Bedeutung der Frage wiederholen wir den Beweis für die Differenzierbarkeit. Daraus folgt dann die Stetigkeit, wie wir wissen.

Satz 1.10. *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die im Inneren des Konvergenzkreises definierte Funktion*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dort holomorph mit Ableitung

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $z_0 = 0$. Sei r der Konvergenzradius. Zu zeigen ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n((z+h)^n - z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Nach der binomischen Formel ist

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} - nz^{n-1} = h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}.$$

Wegen

$$\binom{n}{k} \leq k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

können wir abschätzen gegen

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \leq n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} |h|^{k-2} |z|^{n-2} = n(n-1)(|h|+|z|)^{n-2}$$

Wir wählen $\delta > 0$, so dass $B_\delta(z) \subset B_\theta(0)$, wobei $\theta < r$. Für $|h| < \delta$ gilt also

$$\left| \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n((z+h)^n - z^n) - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)(|h| + |z|)^{n-2}$$
$$|h| \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \theta^{n-2}$$
$$= |h| C$$

denn die Potenzreihe der zweiten Ableitung konvergiert ebenfalls. Der Grenzwert für $h \to 0$ verschwindet also. $\square$

Dieser Satz liefert uns eine sehr große Klasse von sehr interessanten holomorphen Funktionen, sin, cos, log etc.

Kapitel 2

Kurvenintegrale und Stammfunktionen

Nach der Differenzierbarkeit wenden wir uns der Integrierbarkeit zu.

Definition 2.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt* Stammfunktion *von f, wenn $F' = f$.*

Wir sagen, f hat eine Stammfunktion, *wenn ein solches F existiert. Wir sagen, f hat* lokal eine Stammfunktion, *wenn es für jedes $z \in U$ eine offene Umgebung V von z gibt, auf der f eine Stammfunktion hat.*

Im Reellen haben wir Stammfunktionen durch Integration erhalten. So ist es jetzt wieder.

Definition 2.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}$. Eine* Kurve *ist eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion*

$$\gamma : [a, b] \to U.$$

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Das Kurvenintegral *von f über γ ist definiert als*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Beispiel. Sei $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = tz_0$ für $t \in [0, 1]$ der gerade Weg von 0 nach z_0. Dann ist

$$\int_\gamma f\mathrm{d}z = \int_0^1 (tz_0)^2 z_0 \mathrm{d}t = z_0^3 \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3} z_0^3.$$

Wir erhalten genau die Stammfunktion von f.

Beispiel. Wir betrachten die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$. und die Kurve $\gamma(t) = r\exp(it)$ für $t \in [0, 2\pi]$, also den Rand des Kreises mit Radius $r > 0$. Dann ist

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\exp(it)} ir\exp(it)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Man beachte, dass der Wert unabhängig von r ist!

Kurvenintegrale sind eine seltsame Mischung aus komplexer und reeller Analysis. Um mit ihnen umzugehen, benötigen wir die zugehörige Kettenregel.

Lemma 2.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $F : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to U$ eine Kurve. Dann gilt*

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Beweis: Am leichtesten ist der direkte Beweis:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{F(\gamma(t+h) - F(\gamma(t))}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{F(\gamma(t+h) - F(\gamma(t))}{\gamma(t+h) - \gamma(t)} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \\ &= F'(\gamma(t))\gamma'(t).\end{aligned}$$

□

Satz 2.4. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F, $\gamma : [a, b] \to U$ eine Kurve. Dann gilt*

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a).$$

Insbesondere verschwindet das Kurvenintegral für geschlossene Wege (solche mit $\gamma(a) = \gamma(b)$).

Beweis: Ohne Einschränkung ist γ stetig differenzierbar. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= F \circ \gamma(b) - F \circ \gamma(a)\end{aligned}$$

nach dem Hauptsatz der Differentialrechnung für Real- und Imaginärteil von $F \circ \gamma$. □

Also hat $z \mapsto 1/z$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.
Wir erwarten, dass Stammfunktionen eindeutig sind bis auf Konstante. Hat der Definitionsbereich U mehrere Zusammenhangskomponenten, so können die Konstanten unabhängig voneinander gewählt werden. Daher definieren wir:

Definition 2.5. *Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt* wegzusammenhängend, *wenn je zwei Punkte durch eine Kurve verbunden werden können. Sie heißt* Gebiet, *wenn sie offen und wegzusammenhängend ist.*

Korollar 2.6. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $F_1, F_2 : U \to \mathbb{C}$ Stammfunktionen von f. Dann ist $F_1 - F_2$ konstant.*

Beweis: Sei $F = F_1 - F_2$. Dann gilt $F' = 0$. Für jede Kurve in U folgt

$$0 = \int_\gamma F' \mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a).$$

Da je zwei Punkte von U durch eine Kurve verbunden werden können, ist $F_1 - F_2$ konstant. □

Bisher kennen wir ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion. Tatsächlich ist es auch hinreichend.

Satz 2.7. *Sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Für jeden geschlossenen Integrationsweg gelte $\int_\gamma f \mathrm{d}z = 0$. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.*

Beweis: Sei a ein fester Punkt in G. Zu jedem $z \in G$ wählen wir einen Weg γ_z von a nach z und setzen

$$F(z) = \int_\gamma f \mathrm{d}z.$$

Diese Zahl ist wohldefiniert, da das Kurvenintegral über geschlossene Wege verschwindet. Nun berechnen wir die Ableitung von F in z_0. Sei z nahe bei z_0, so dass der gerade Weg von z_0 nach z in G verläuft. Nach Definition ist

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f \mathrm{d}z - \int_{\gamma_{z_0}} f \mathrm{d}z = \int_{[z_0,z]} f \mathrm{d}z$$

letzteres wieder, da das Kurvenintegral über geschlossene Wege verschwindet. Explizit betrachten wir den Weg $\gamma(t) = z_0 + t(z - z_0)$ mit $t \in [0, 1]$, also

$$\int_{[z,z_0]} f \mathrm{d}z = \int_0^1 f(\gamma(t))(z - z_0)\mathrm{d}t = (z - z_0) \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\mathrm{d}t.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \lim_{z \to z_0} f(z_0 + t(z - z_0)\mathrm{d}t = f(z_0) \end{aligned}$$

wobei wir Grenzwert und Integral vertauschen dürfen, da der Integrand stetig ist als Funktion von z und t (Analysis II). □

Unser Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass holomorphe Funktionen eine Stammfunktion haben. Das Beispiel $z \mapsto 1/z$ zeigt, dass wir dabei sehr sorgfältig formulieren müssen.

Theorem 2.8 (Cauchyscher Integralsatz)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, d.h. für je zwei Punkte in G liegt die Strecke zwischen ihnen ebenfalls in G. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in G*

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = 0.$$

Äquivalent: f hat eine Stammfunktion.

Bemerkung. Für die späteren Anwendungen beweise wir etwas mehr. Es genügt die Voraussetzung:

(i) f ist stetig

(ii) f ist holomorph mit eventueller Ausnahme eines Punktes.

Der entscheidende Beweisschritt sind Dreieckswege.

Satz 2.9 (Lemma von Goursat)**.** *Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck. Sei f holomorph in einer Umgebung von Δ. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z = 0.$$

Beweis: Wir schätzen $|\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z|$ nach oben ab. Wir setzen $\Delta = \Delta_0$. Wir unterteilen das Dreick in 4 kleinere Dreiecke $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$, indem wir als zusätzliche Ecken die Seitenmittelpunkte von Δ_0 benutzen. Es gilt dann

$$\int_{\partial\Delta_0} f \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f \mathrm{d}z$$

das sich die zusätzlichen Kurvenintegrale wegheben (Skizze!). Wir schätzen gegen das größte dieser Integrale ab

$$\left|\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z\right| \leq 4 \max \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f \mathrm{d}z\right|$$

Sei Δ_1 das Dreieck, in dem das Maximum angenommen wird. Wir wiederholen den Prozess und erhalten eine Folge von Dreiecken

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$$

mit

$$\left|\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f \mathrm{d}z\right|.$$

Da die Dreiecke immer kleiner werden und abgeschlossen sind, gibt es einen eindeutigen Punkt z_0, der in allen Δ_n enthalten ist. In z_0 ist f komplex differenzierbar, also

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi(z) = f(z_0) + (z - z_0)(f'(z_0) + A(z))$$

wobei $\lim_{z \to z_0} \phi(z)/(z - z_0) = 0$ oder äquivalent $A = \phi/(z - z_0)$ in z_0 stetig mit $A(z_0) = 0$. Die lineare Funktion $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ hat eine Stammfunktion, also

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) \mathrm{d}z = 0.$$

Daher

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n}(z-z_0)A(z)\mathrm{d}z\right| \leq L(\partial\Delta_n)\max_{z\in\Delta_n}(|z-z_0|A(z)|)$$
$$\leq L(\partial\Delta_n)^2\max_{z\in\Delta_n}(|A(z|))$$

wobei $L(\partial\Delta_n)$ die Länge des Dreickswegs ist. Da sich die Dreiecke immer halbieren, gilt

$$L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}Ł(\partial\Delta).$$

Wir setzen zusammen

$$4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f\mathrm{d}z\right| \leq 4^n(2^{-n})^2L(\partial\Delta)^2\max_{z\in\Delta_n}|A(z)|$$

Da A stetig ist und in z_0 verschwindet, wird die rechte Seite beliebig klein. □

Korollar 2.10. *Die Behauptung des Lemma von Goursat gilt auch, wenn f nur stetig auf einer Umgebung von $\overline{\Delta}$ ist und f holomorph auf $\overline{\Delta}\setminus\{z_0\}$ für ein $z_0\in\overline{\Delta}$.*

Beweis: Wir zerlegen das Dreieck in kleinere Teildreiecke, wobei z_0 eine der Ecken wird. Es genügt, die Behauptung für jedes Teildreieck zu beweisen. Sei also ab jetzt z_0 eine Ecke von Δ. Durch Abschneiden bilden wir eine Folge von Teildreiecken

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$$

mit Ecke z_0 und $\bigcap\Delta_i = \{z_0\}$. Wegen des Lemmas von Goursat (Skizze!) ist jeweils

$$\int_{\partial\Delta} f\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_1} f\mathrm{d}z = \dots = \int_{\partial\Delta_n} f\mathrm{d}z$$

Wir können das Integral also abschätzen gegen

$$L(\partial\Delta_n)\max_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

Das Maximum existiert, da f stetig ist. Da die Dreiecke immer kleiner werden, gilt $\lim_{n\to\infty}L(\partial\Delta_n) = 0$. □

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes. Wir zeigen die Existenz einer Stammfunktion. Die Voraussetzung unseres Kriteriums (Satz 2.7) ist zwar nicht erfüllt, dessen Beweis funktioniert aber: Wir wählen $a\in G$. Für jedes $z\in G$ liegt die Strecke $[a,z]$ in G, da G konvex ist. Wir setzen

$$F(z) = \int_{[a,z]} f\mathrm{d}z.$$

Für jedes z, z_0 liegt auch die Strecke $[z, z_0]$ in G. Es folgt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[a,z]} f\mathrm{d}z - \int_{[a,z_0]} f\mathrm{d}z = \int_{[z_0,z]} f\mathrm{d}z$$

nach dem Lemma von Goursat. Wie im Beweis von Satz 2.7 berechnen wir dann

$$F'(z_0) = f(z_0).$$

□

Wir tragen noch eine Rechenregel nach, die wir bereits mehrfach in Spezialfällen benutzt haben. In Analysis 2 haben wir den Begriff eines rektifizierbaren Weges in $\mathbb{R}^n$ betrachtet, einer der eine wohldefinierte Länge hat. Ist γ stetig differenzierbar, so berechnet sie sich als

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Dort haben wir auch die Abschätzung

$$\| \int_a^b g(t) \mathrm{d}t \| \leq \int_a^b \|g(t)\| \mathrm{d}t$$

kennengelernt.

Lemma 2.11. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to U$ eine Kurve, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$\left| \int_\gamma f \mathrm{d}z \right| \leq L(\gamma) \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|.$$

Beispiel. Sei $\gamma(t) = z_0 + t(z - z_0)$ für $t \in [0, 1]$ der gerade Weg von z_0 nach z. Dann ist

$$L(\gamma) = \int_0^1 |(z - z_0)| \mathrm{d}t = |z - z_0|.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \mathrm{d}t \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)||\gamma'(t)| \mathrm{d}t \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| \mathrm{d}t \\ &= \max_{t \in [a,b]} L(\gamma). \end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Cauchysche Integralformel und Konsequenzen

Theorem 3.1 (Cauchysche Integralformel)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$. Sei $B = B_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe mit Abschluss enthalten in G. Dann gilt für jedes $z \in B$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

Beweis: Wir ersetzen G durch eine offene Kreisscheibe $B_R(z_0)$ mit $R > 0$. (Diese Kreisscheibe existiert, da ∂B kompakt ist.) Insbesondere ist G ohne Einschränkung konvex. Wir fixieren z. Wir betrachten die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit

$$\zeta \mapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & z = \zeta. \end{cases}$$

Nach Definition ist diese Funktion stetig auf G und holomorph auf $G \setminus \{z\}$. Wir wenden den Cauchyschen Integralsatz in der verschärften Version an und erhalten

$$0 = \int_{\partial B} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Zu zu zeigen ist also

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = 2\pi i.$$

Zunächst beträchten wir den Spezialfall $z = z_0$. Wir haben das Integral bereits im Fall $z_0 = 0$ bestimmt. Der allgemeine Fall geht genauso. Sei $\gamma(t) = z_0 + r\exp(it)$ mit $t \in [0, 2\pi]$, also

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\exp(it)} ir\exp(it) = 2\pi i.$$

Sei nun z beliebig. Wir wählen eine Kreisscheibe $B_\varrho(z)$, die ganz in B enthalten ist. Die Funktion $(\zeta - z)^{-1}$ ist holomorph auf $G \setminus \{z\}$. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B_\varrho(z)} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = 2\pi i.$$

Dafür verbinden wir die beiden Kreislinien durch mehrere Speichen, so dass wir geschlossene Kurven in konvexen Teilgebieten von $G \setminus \{z\}$ bekommen. (Skizze!) Die Beiträge auf den Speichen heben sich weg, daher sind die Beiträge der beide Kreise gleich. □

Satz 3.2 (Potenzreihenentwicklung)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $B = B_r(z_0)$ so, dass der Abschluss in G enthalten ist. Dann lässt sich f in $B_r(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln. Für $z \in B$ gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

Beweis: Zur Vereinfachung setzen wir $z_0 = 0$. Wir gehen von der Integralformel aus:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \mathrm{d}\zeta.$$

Es gilt $|z/\zeta| < 1$, daher konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}.$$

Sie konvergiert absolut und gleichmäßig auf ∂B, also konvergiert auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}$$

gleichmäßig auf ∂B. Wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \mathrm{d}\zeta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir Summe und Integral vertauschen (Analysis 2) und erhalten

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \right) z^n.$$

□

Korollar 3.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar.*

Beweis: Sei $z \in U$. Dann enthält U eine offene Kreisscheibe B wie im Satz. In B ist f beliebig oft differenzierbar, weil dies für Potenzreihen gilt. □

Der Beweis gibt auch eine Formel für die Ableitungen:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

Korollar 3.4. *Die Taylorreihe von f konvergiert auf jeder Kreisscheibe, die im Definitionsgebiet enthalten ist.*

Beweis: Wir wenden den Satz über die Potenzreihenentwicklung an. □

Wir fassen zusammen, was wir bisher wissen: Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $f : U \to \mathbb{C}$:

(i) Die Funktion f ist holomorph.

(ii) Die Funktion ist reell differenzierbar und die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen sind erfüllt.

(iii) Die Funktion ist stetig und für jedes Dreieck Δ, dessen Abschluss in U liegt, gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$. (Satz von Morera)

(iv) Die Funktion f hat lokal eine Stammfunktion.

(v) Für jeden Punkt $z_0 \in U$ ist f in einer Kreisscheibe in eine Potenzreihe entwicklbar.

Die letzte Bedingung heißt auch: f ist (komplex) *analytisch.*

Beweis: Die erste Aussage ist Satz 1.5. Die Aussage über Dreiecke der Satz von Goursat, d.h. ein Spezialfall des Integralsatzes. Hieraus folgte die Existenz der Stammfunktion auf konvexen offenen Teilmengen. Umgekehrt ist eine Stammfunktion holomorph, also unendlich oft differenzierbar. Damit ist auch f holomorph. Analytische Funktionen sind holomorph nach Satz 1.10. Umgekehrt lassen sich holomorphe Funktionen nach Satz 3.2 lokal in Potenzreihen entwickeln. □

Wir können die Koeffizienten der Taylor-Reihe auch explizit abschätzen.

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \max_{\zeta \in \partial B} |f(\zeta)| \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}.$$

Also:

Satz 3.5 (Cauchyabschätzung)**.** *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $B = B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe, deren Abschluss in U liegt. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_0. Sei $M = \max_{\zeta \in \partial B} |f(\zeta)|$. Dann gilt*

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Satz 3.6 (Satz von Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt durch M. Sei c_n der n-te Koeffizient der Taylorentwicklung. Dann gilt für jedes $r > 0$

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Im Grenzwert $r \to \infty$ folgt $c_n = 0$ für $n \geq 1$. □

Korollar 3.7 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann hat P eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Bemerkung. Mit anderen Worten: Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen; jedes nicht-konstante Polynom zerfällt in Linearfaktoren.

Beweis: Angenommen, $P = a_n z^n + \cdots + a_0$ hat hat keine Nullstellen. Dann ist $f = 1/P$ eine ganze Funktion. Für $|z| = r$ ist

$$|P(z)| \geq |a_n| r^n - |a_{n-1} r^{n-1} - \ldots |a_0| \xrightarrow{r \to \infty} \infty$$

falls $n \geq 1$. Dann ist $f = 1/P$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant, also auch P konstant, d.h. vom Grad 0. Das ist ein Widerspruch. □

Definition 3.8. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph in z_0. Wir sagen f hat in z_0 eine* Nullstelle der Vielfachheit *oder* Ordnung *$n \geq 0$, wenn*

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Verschwinden alle Ableitungen, so sagen wir, f hat eine Nullstelle der Vielfachheit ∞.

Hat f eine Nullstelle der Ordnung n in z_0, so gilt

$$f(z) = \sum_{k \geq n} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^n h(z)$$

wobei h holomorph in z_0 mit $h(z_0) \neq 0$. Hat f eine Nullstelle der Vielfachheit ∞, so ist $f = 0$ in einer Umgebung von 0. Tatsächlich gilt noch mehr.

Lemma 3.9. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $A \subset U$ eine nicht-diskrete Teilmenge, d.h. A hat einen Häufungspunkt z_0 in U. Es gelte $f(a) = 0$ für alle $a \in A$. Dann hat f eine Nullstelle unendlicher Vielfachheit in z_0.*

Beweis: Wir betrachten eine Folge $(z_\nu)_{\nu \geq 1}$ in A mit Grenzwert z_0, wobei alle $z_\nu \neq z_0$. Angenommen, f hat in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung n. Es ist

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z)$$

mit $h(z_0) \neq 0$. Die Funktion h ist stetig in z_0, also gibt es eine offene Umgebung V on z_0, auf der $h(z) \neq 0$. Sei z_ν so nahe bei z_0, dass $z_\nu \in V$. Dann gilt

$$0 = f(z_\nu) = (z_\nu - z_0)^n h(z_\nu) \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Satz 3.10 (Identitätssatz)**.** *Sei G ein Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(i) $f = g$ auf G;

(ii) $f = g$ auf einer offenen Teilmenge von G;

(iii) $f = g$ auf einer nicht-diskreten Teilmenge A.

(iv) Es gibt ein $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \geq 0$.

Beweis: Die Implikationen (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) sind trivial. Inhalt des Lemmas war die Implikation (iii) ⇒ (iv) für $f - g$. Wie wir bereits festgestellt hatten, bedeutet dies, dass $f - g = 0$ im Inneren des Konvergenzkreises von der Taylorreihe, insbesondere auf einer offenen Teilmenge.

Sei $M \subset G$ die Teilmenge der Punkte, in denen $f - g$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung hat. Wir haben gesehen ((iv) ⇒ (ii)), dass diese Menge offen ist. Im Lemma haben wir gezeigt, dass sie abgeschlossen unter Häufungspunkten ist. Für jede Kurve $\gamma : [a, b] \to G$ enthält sie mit einem Punkt also auch die ganze Kurve. Da G kurvenzusammenhängend ist, ist $M = G$. Damit ist auf (ii)⇒ (i) gezeigt. □

Unsere letzte direkte Konsequenz aus der Integralformel charakerisiert die topologischen Eigenschaften von holomorphen Funktionen.

Satz 3.11 (Gebietstreue)**.** *Sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis: Da die Abbildung stetig ist, ist das Bild der kurvenzusammenhängenden Menge G wieder kurvenzusammenhängend.

Wir wollen nun zeigen, dass $W = f(G) \subset \mathbb{C}$ offen ist. Sei $w_0 \in W$, $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = w$. Nach dem Identitätssatz gibt es eine Kreisscheibe $B = B_r(z_0) \subset G$, deren Abschluss keine weitere w_0-Stelle von f enhält (sonst hätte die Menge der w_0-Stellen einen Häufungpunkt, also $f = w_0$). Sei

$$m = \min_{z \in \partial B} |f(z) - w_0| > 0.$$

Sei $\varepsilon = m/3$.

Behauptung. $B_\varepsilon(w_0) \subset W$.

Sei $w \in B_\varepsilon(w_0)$. Wir suchen eine Nullstelle von $g = f - w$. Es folgt für $z \in \partial B$

$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w| \geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Gleichzeitig gilt

$$|g(z_0)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \varepsilon.$$

Also

$$|g(z_0)| < \min_{z \in \partial B} |g(z)|.$$

Angenommen, g hat keine Nullstelle in B. Wegen der Abschätzung hat es dann auch keine Nullstelle auf dem Rand und daher sogar keine Nullstelle auf einer Umgebung des Abschlusses von B. Wir verwenden die 0-te Cauchy-Abschätzung für $h = 1/g$

$$|h(z_0)| \leq \max_{z \in \partial B} |h(z)| \Leftrightarrow |g(z_0)| \geq \min_{z \in \partial B} |g(z)|.$$

Dies ist ein Widerspruch, also hat g eine Nullstelle. □

Satz 3.12. *Sei G Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum hat, so ist f konstant.*

Beweis: Sei f nicht konstant. Dann ist $f(G) \subset \mathbb{C}$ offen, enthält mit jedem w_0 also auch eine Kreisscheibe um w_0. Daher kann w_0 kein Maximum von $|f|$ sein. □

Kapitel 4

Laurent-Reihen und isolierte Singularitäten

Nach dem letzten Kapitel verstehen wir holomorphe Funktionen auf Kreisscheiben: es sind einfach die konvergenten Potenzreihen. Der nächste kompliziertere Fall sind *Kreisringe*, Mengen der Form

$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | r < |z - z_0| < R$$

für $r < R$. Auch die Fälle $r = 0$ oder $R = \infty$ wollen wir erlauben.

Beispiel. Für $n \in \mathbb{Z}$ sind die Funktionen z^n holomorph auf dem Kreisring $A_{0,\infty}$. Für $n \geq 0$ lassen sie sich holomorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzen. Eine Stammfunktion existiert für $n \neq -1$. Kompliziertere Beispiele erhält man durch Linearkombination, z.B. $z^{-2} + z^2$.

Theorem 4.1 (Laurent-Zerlegung)**.** *Sei $0 \leq r < R \leq \infty$. Sei $f : A_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktion auf dem Kreisring. Dann existieren holomorphe Funktionen*

$$f_1 : U_1 = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| > r\} \to \mathbb{C}$$
$$f_2 : U_2 = B_R(z_0) \to \mathbb{C}$$

so dass auf $A_{r,R}(z_0) = U_1 \cap U_2$ gilt

$$f = f_1 + f_2.$$

Dabei kann f_1 so gewählt werden, dass $\lim_{z\to\infty} |f_1^{(}z_1)| = 0$. Durch diese Bedingung werden f_1 und f_2 eindeutig festgelegt.

Wir nennen f_1 den *Hauptteil* und f_2 den *Nebenteil* von f.

Der Einfachheit halber betrachten wir $z_0 = 0$. Die Funktion f_2 ist auf einer Kreisscheibe definiert, wird also durch eine Potenzreihe dargestellt. Die Funktion

$g_1(z) = f_1(1/z)$ ist holomorph auf der Kreisscheibe $B_{1/R}(0)$ (genauer: auf dem Kreisring $A_{0,1/R}(0)$). Sie ist in 0 stetig, da $\lim_{z\to 0} g_1(z) = \lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (verschäfte Version) hat g_1 eine Stammfunktion , wird also durch eine Potenzreihe dargestellt. Dies führt zu Reihendarstellungen:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ für } z \in U_2$$
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} \text{ für } z \in U_1$$

Die Grenzwertbedingung bedeutet $g_2(0) = d_0 = 0$. Wir setzen dann für $n < 0$ einfach $c_{-n} = d_n$ und erhalten im Kreisring

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Wir halten also fest:

Korollar 4.2 (Laurent-Reihe)**.** *Sei $f : A_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f ein eindeutige Darstellung in der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Hierbei konvergiert die Hauptteil $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ für $|z - z_0| > r$ und der Nebenteil $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < R$.

Die gleiche Idee gibt uns auch eine Formel für die Koeffizienten. Wir verwenden die Cauchy-Formel aus Satz 3.2. Wieder zuerst $z = 0$. Für $n \geq 0$ und $\varrho < R$ erhalten wir

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(0)} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

Wir behaupten, dass wir sogar f_2 durch f ersetzen können, also das Integral mit f_1 verschwindet. Wir wenden die Substitutionsformel $s = \zeta^{-1}$, $\mathrm{d}s = -\zeta^{-2}\mathrm{d}\zeta$ bzw. $\mathrm{d}\zeta = -s^{-2}\mathrm{d}s$ an. Man beachte, dass sich dabei die Umlaufrichtung des Weges ändert. Wir erhalten also

$$\int_{\partial B_\varrho(0)} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \int_{-\partial B_{1/\varrho}(0)} g_1(s) s^{n+1} (-s^2) \mathrm{d}s = \int_{\partial B_{1/\varrho}(0)} g_1(s) s^{n-1} \mathrm{d}s$$

Für $n \geq 1$ ist der Integrand holomorph in auf einer Umgebung von $B_{1/\varrho}(0)$. Das Integral verschwindet nach dem Integralsatz. Für $n = 0$ finden wir nach der Integralformel den Wert $g_1(0) = 0$.

Für $n < 0$, $k = -n$ wenden wir diesselbe Argumente auf die Funktion $f(1/z)$ an. Für $\varrho > r \Rightarrow \varrho^{-1} < r^{-1}$ erhalten wir mit derselben Substitution

$$c_n = d_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\varrho^{-1}}(0)} \frac{g_1(\zeta))}{\zeta^{k+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(0)} f_1(s)s^{k-1}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(0)} \frac{f_1(s)}{s^{n+1}}\mathrm{d}s.$$

Wieder können wir f_1 durch f ersetzen, denn das Integral über f_2 verschwindet mit dem gleichen Argument wie oben.
Damit haben wir gezeigt:

Korollar 4.3. *Die Koeffizienten der Laurent-Reihe sind gegeben durch*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Auch die Cauchy-Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{\max_{\zeta\in\partial B_\varrho(z_0)} f(\zeta)}{\varrho^n}$$

gilt dann wie im Fall von Potenzreihen.
Jetzt wird es Zeit, den Beweis der Existenz der Zerlegung nachzutragen.

Beweis des Theorems zur Laurent-Zerlegung. Ohne Einschränkung ist $z_0 = 0$. Sei $z \in A_{r,R}(0)$. Sei $\varrho = |z|$. Wir wählen $\delta > 0$, so dass $r < \varrho - \delta$, $\varrho + \delta < R$. Wir wollen zeigen, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\varrho+\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\varrho-\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Nach der Integralformel gilt dies, wenn wir über den Rand von $B_\delta(z)$ integrieren. Der Integrand ist holomorph in $A_{r,R}(0)\smallsetminus\{z\}$. Wie im Beweis der Integralformel unterteilen wir den Kreisring durch Speichen, so dass wir geschlossene Wege in konvexen Teilgebieten erhalten. Dabei soll der Kreis $B_\delta(z)$ von zwei benachbarten Speichen eingeschlossen werden. Die Integral über die geschlossenen Wege verschwinden, wenn z nicht im Inneren des Sektors liegt, da dann der Integrand (Skizze!, vergl. Jänich S. 41) Durch Zusammensetzen erhalten wir wie gewünscht

$$\int_{\partial B_\delta(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial B_{\varrho+\delta}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \int_{\partial B_{\varrho-\delta}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Wir setzen nun

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\varrho-\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\varrho+\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

Die Funktion f_2 ist holomorph auf $|z| < \varrho + \delta$. Dies sehen wir entweder durch Differentition des Parameterintegrals oder indem wir wie in der Herleitung der Potenzreihenentwicklung den Integranden als geometrische Reihe entwickeln. Dasselbe Argument funktioniert auch für $g_1(z) = f_1(1/z)$ auf $|z| < (\varrho - \delta)^{-1}$. Also ist f_1 holomorph auf $|z| > \varrho - \delta$.

Durch Subtraktion von $g_1(0) = \lim_{z\to\infty} f_1(z)$ erreichen wir die spezielle Wahl. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit dieser speziellen Zerlegung. Sei $f = h_1 + h_2$ eine weitere Zerlegung. Dann ist

$$f_1 + f_2 = h_1 + h_2 \Rightarrow f_1 - h_1 = h_2 - f_2.$$

Die linke Seite ist auf U_1 definiert, die rechte auf U_2. Insgesamt erhalten wir so eine ganze Funktion F. Diese ist beschränkt, da

$$\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0 = \lim_{z\to\infty} h_1(z).$$

Nach dem Satz von Liouville ist F konstant. Wegen $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$ ist diese Konstante 0. Dies zeigt $f_1 = h_1$ und $f_2 = h_2$.

Bisher haben wir die behauptete Zerlegung nur in einem kleineren Kreisring gezeigt. Diese Kreisringe überdecken ganz $A_{r,R}(0)$. Wo sich zwei der schmaleren Kreisringe überschneiden, stimmen die Zerlegungen wegen der Eindeutigkeit überein. Tatsächlich erhalten wir also eine globale Zerlegung. □

Genau wie Potenzreihen, werden auch Laurent-Reihen gliedweise differenziert. Dies sieht man z.B. in dem man Haupt- und Nebenteil getrennt behandelt.

Korollar 4.4. *Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, $f : A_{r,R}(z_0)$ holomorph. Dann hat f genau dann eine Stammfunktion auf dem Kreisring, wenn*

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_0)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$$

für ein (und dann alle) $r < \varrho < R$.

Beweis: Wir wissen bereits, dass diese Bedingung notwendig ist. Sie ist auch hinreichend, wie wir an der Laurent-Reihe ablesen. □

Der Koeffizient von z^{-1} spielt also eine besondere Rolle.

Definition 4.5. *Sei $f : A_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt*

$$\mathrm{res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_0)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

Residuum *von f in z_0.*

Fast trivalerweise erhalten wir dann die erste Babyversion des *Residuensatzes*

$$\int_{\partial B_\varrho(z_0)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 2\pi i \mathrm{res}_{z_0} f.$$

Eines unserer Ziele die Verallgemeinerung dieser Formel auf Funktionen mit mehr als einer Singularität und auf allgemeinere Wege.

Beispiel. Sei $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir betrachten $f(z)/z$. Diese Funktion ist holomorph auf der punktierten Kreisscheibe $B_{0,R}(0)$ gleich $f(0)$, denn $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ bedeutet $f(z)/z = \sum_{n=-1}^\infty c_{n+1} z^n$. Wir erhalten also die Integralformel zurück, die wir natürlich zum Beweis gebraucht haben.

Isolierte Singularitäten

Wir betrachten jetzt etwas systematischer holomorphe Funktionen auf der punktierten Kreisscheibe $A_{0,R}(z_0)$. Nach dem Satz über die Laurent-Reihen-Entwicklung gilt

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

Definition 4.6. *Sei $f : A_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir sagen:*

(i) f hat eine hebbare Singularität in z_0*, wenn der Hauptteil von f verschwindet, also $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n (z - z_0)^\infty$.*

(ii) f hat einen Pol in z_0*, wenn der Hauptteil von f eine endliche Summe ist, d.h. es gibt $N < 0$ mit $f(z) = \sum_{n=N}^\infty c_n (z - z_0)^n$.*

(iii) f hat eine wesentliche Singularität in z_0*, wenn f weder eine hebbare Singularität noch einen Pol in z_0 hat.*

Hat f eine hebbare Singularität, so lässt sich f durch die Potenzreihe zu einer holomorphen Funktion auf $B_R(z_0)$ fortsetzen.

Satz 4.7 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Sei $f : A_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt in einer Umgebung von z_0. Dann hat f eine hebbare Singularität in z_0.*

Beweis: Sei M eine obere Schranke für $f(\zeta)$ in einer Umgebung von z_0. Nach der Cauchy-Abschätzung gilt dann

$$|c_n| \leq \frac{M}{\varrho^n}$$

für alle (genügend kleinen) ϱ. Für $n < 0$ folgt hieraus $c_n = 0$. □

Hat f einen Pol, so gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $(z - z_0)^N f(z)$ holomorph ist. Das kleinste solche N heißt *Polordnung* von f. Im Falle $N = 0$ liegt eine hebbare Singularität vor.

Satz 4.8. *Sei $f : A_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung N. Dann gilt*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| \to \infty.$$

Beweis: Ohne Einschränkung ist $z_0 = 0$. Hat f einen Pol der Ordnung N, so schreiben wir $f = z^{-N} h(z)$ mit holomorph und $h(0) \neq 0$. Dann ist

$$lim_{z \to 0} \left| \frac{h(z)}{z^N} \right| = \frac{|h(0)|}{\lim_{z \to 0} |z|^N} \to \infty.$$

Hat f eine hebbare oder eine wesentliche Singularität, so haben wir gesehen, dass der Grenzwert nicht ∞ ist. □

Lemma 4.9. *Sei $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit Nullstellenordnung N. Dann ist $1/f : A_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellenordnung N:*

Beweis: Ohne Einschränkung ist $z_0 = 0$. Nach Vorraussetzung ist $f(z) = z^N h(z)$ mit h holomorph, $h(0) \neq 0$. Nach der Quotientenregel ist dann $1/h$ holomorph. Es folgt die Aussage über die Polordnung. □

Satz 4.10 (Casorati-Weierstraß)**.** *Sei $f : A_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität in z_0. Dann ist $f(A_{0,R}(z_0)$ dicht in $\mathbb{C}$.*

Beispiel. Die Funktion $\exp(1/z)$ hat als Wertemenge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, lässt also sogar nur einen einzigen Punkt aus. Tatsächlich gilt das in jeder wesentlichen Singularität. Dies ist der (kleine) Satz von Picard, den wir nicht beweisen werden.

Beweis: Angenommen, das Bild ist nicht dicht. Dann gibt es $w_0 \in \mathbb{C}$ und eine Kreisscheibe $B_\varepsilon(w_0)$, die nicht von f getroffen wird. Dann ist die Funktion

$$h : z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$

beschränkt durch ε. Nach dem Riemmanschen Hebbarkeitssatz ist sie holomorph in z_0. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0.$$

Dann hat f in z_0 einen Pol oder eine hebbare Singularität. □

Wir haben also gesehen, dass die drei Typen von Singularitäten sind am Grenzwertverhalten für $z \to z_0$ unterscheiden lassen.

(i) hebbare Singularität $\Leftrightarrow$ beschränkt nahe z_0 $\Leftrightarrow$ stetig in z_0 $\Leftrightarrow$ holomorph in z_0

(ii) Pol $\Leftrightarrow$ Grenzwert ∞ in z_0

(iii) wesentliche Singularität $\Leftrightarrow$ kein Grenzwert in z_0

Wir lassen nun die Einschränkung auf Kreisscheiben fallen. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ ein isolierter Punkt, d.h. es gibt eine Kreisscheibe $A_{0,\varepsilon}(z_0) \subset U$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir sagen, f hat hebaren Singularitäten/einen Pol/eine wesentlichen Singularität in z_0, wenn dies in $A_{0,\varepsilon}(z_0)$ gilt.

Definition 4.11. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir sagen $f : U \to \mathbb{C}$ hat* isolierte Singularitäten*, wenn $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei alle Elemente von A isolierte Punkte von U sind. Sie heißt* meromorphe Funktion auf U*, wenn diese Singularitäten hebbar oder Polstellen sind.*

Man beachte den ungenauen Sprachgebrauch. Die Funktion f ist gar nicht auf ganz U definiert!

Kapitel 5

Analytische Fortsetzung

Wir wollen verstehen, inwiefern Integrale von der gewählten Kurve abhängen.

- Im allgemeinen verschwindet das Integral über eine geschlossene Kurve nicht, ist also abhängig von der Wahl.
- Ist f holomorph auf einem Kreisring, so hängt der Wert des Integrals über eine Kreislinie nicht mit Radius ab.

Ein besserer Standpunkt ist es, nach der Kurvenabhängigkeit der Stammfunktion oder allgemeiner von analytischen Fortsetzungen zu fragen.

Definition 5.1. *(i) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Ein* Weg *in U ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to U$.*

(ii) Sei $f : U_a \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von $\gamma(a)$. Wir nennen eine holomorphe Funktion $g : U_b \to \mathbb{C}$ auf einer Umgebung von b eine analytische Fortsetzung *von f entlang γ, wenn es eine Folge von Punkten $a = t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq b$, eine Folge von Radien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ gibt und eine Folge von holomorphen Funktionen*

$$f_i : B_{\varepsilon_i}(\gamma(t_i)) \to \mathbb{C}$$

so dass

- *$f_1 = f$ auf $U_a \cap B_{\varepsilon_1}(a)$;*
- *$f_n = g$ auf $U_b \cap B_{\varepsilon_n}(b)$;*
- *$U_i = B_{\varepsilon_i}(\gamma(t_i)) \cap B_{\varepsilon_{i+1}}(\gamma(t_{i+1}) \neq \emptyset$ und $f_i|_{U_i} = f_{i+1}|_{U_i}$.*

Bemerkung. Es ist nicht wichtig, dass wir mit Kreisscheiben arbeiten. Der entscheidende Punkt ist, dass es sich um *zusammenhängende* offene Menge handelt, deren Schnitt ebenfalls zusammenhängend ist. Konvexe Mengen wären genauso geeignet.

Beispiel. Wir betrachten die analytische Fortsetzung von $\log(z)$ entlang des Einheitskreise. Der Weg ist also $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \exp(it)$. Wir wählen die Punkte $t_i = i/4$ für $i = 0, \dots, 4$, jeweils mit Radius 1. Sei $f = f_0 = \log$, die Stammfunktion von $1/z$, die in 1 den Wert 0 hat. (Der *Hauptzweig* des Logarithmus.) Entlang des Einheitskreises erfüllt diese Stammfunktion

$$\log(\exp(2\pi it)) = \int_0^{2\pi t} \frac{1}{\exp(is)} i \exp(is) \mathrm{d}s = 2\pi it.$$

Für den Mittelpunkt $z_j = \exp(2\pi ij/4)$ wählen wir

$$f_j(z) = 2\pi ij/4 + \log(z_j^{-1} z).$$

Diese Funktion ist auf $B_1(z_j)$ wohldefiniert, da Multiplikation mit z_j den Kreis um 1 auf den um z_j abbildet. Es handelt sich um eine Stammfunktion von $1/z$. Der Punkt $\gamma(t_j + 1/8)$ liegt im Schnitt von $B_1(z_j)$ und $B_1(z_{j+1})$. In diesem Punkt gilt

$$\begin{aligned}
f_j(\exp(2\pi ij/4 + 2\pi i/8)) &= 2\pi ij/4 + \log(\exp(2\pi i/8)) \\
&= 2\pi i/4 + 2\pi i/8 \\
f_{j+1}(\exp(2\pi ij/4 + 2\pi i/8)) &= f_{j+1}(\exp(2\pi i(j+1)/4 - 2\pi i/8)) \\
&= 2\pi i(j+1)/4 + \log(\exp(-2\pi i/8)) \\
&= 2\pi i(j+1)/4 - 2\pi i/8
\end{aligned}$$

Die beiden Werte sind gleich. Die analytische Fortsetzung von log von 1 nach 1 entlang des Kreises ist also $2\pi i + \log$.

Lemma 5.2. *Wenn eine analytische Fortsetzung existiert, so ist sie eindeutig (bis auf eventuelles Verkleinern des Definitionsbereichs).*

Beweis: Gegeben eine Kette von Kreisscheiben wie in der Definition, so ist nach dem Identitätssatz f_{i+1} eindeutig durch f_i bestimmt.

Gegeben eine weitere Folge von Kreisen $B_{\delta_j}(\gamma(s_j))$ für $j = 1, \dots, m$ mit Funktionen g_j. Wir betrachten die Menge T der $t \in [a, B]$, für die die analytische Fortsetzung von f nach t entlang der beiden Folgen in einer Umgebung von t übereinstimmt. Nach Definition ist diese Menge offen in $[a, b]$.

Wir zeigen, dass sie auch abgeschlossen ist. Sei s ein Häufungspunkt von T. Dann gibt es Indizes i und j, so dass

$$\gamma(s) \in B_{\varepsilon_i}(\gamma(t_i)) \cap B_{\delta_j}(\gamma(t_j)) =: V.$$

Die Abbildung γ stetig, daher ist $\gamma^{-1}(V)$ offen in $[a, b]$. Da s ein Häufungspunkt von T ist, gibt es ein $t \in T \cap V$. Die Funktionen f_i und g_j stimmen nach Definition von T in einer Umgebung von $\gamma(t)$ überein. Nach dem Identitätssatz stimmen sie dann in der zusammenhängenden Menge V überein, also auch in einer Umgebung von s. Damit liegt $s \in S$.

Insgesamt ist T offen und abgeschlossen, stimmt also mit ganz $[a, b]$ überein. □

Bemerkung. Im allgemeinen existiert die analytische Fortsetzung nicht. Zum Beispiel hat $f(1) = 1/z$ keine analytische Fortsetzung entlang des Weges $\gamma(t) = 1 - t$, für $t \in [0, 1]$.

Satz 5.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to U$ ein Weg. Sei F_a eine Stammfunktion von f in einer Umgebung von $\gamma(a)$. Dann hat F_a eine analytische Fortsetzung entlang γ.*

Beweis: Wir wählen eine endliche Kette von Kreisen entlang γ, die ganz in U liegen. Eine solche Kette existiert: Für jedes $t \in [a, b]$ gibt es einen Radius ε_t so dass $B_{\varepsilon_t}(\gamma(t)) \subset U$. Das Urbild $\gamma^{-1}(B_{\varepsilon_t}(\gamma(t)))$ enthält ein offenes Intervall (a_t, b_t) mit $a_t < t < b_t$. (Genauer: das Intervall ist offen in $[a, b]$ und enthält t.) Diese Intervalle überdecken $[a, b]$. Diese Menge ist kompakt, daher genügen endlich vielen von Kreisscheiben. Seien $t_1, \ldots, t_n$ die zugehörigen Punkte. Ohne Einschränkung ist $t_1 = a$, $t_n = b$. Dann haben die Kreisscheiben $B_i = B_{\varepsilon_{t_i}}(\gamma(t_i))$ die gewünschten Eigenschaften. Auf jeder dieser Kreisscheiben hat die Funktion f eine Stammfunktion F_i, die bis auf Konstante eindeutig ist. Wir wählen die Konstanten so, dass $F_1 = F_a$, $F_i = F_{i+1}$ auf $B_i \cap B_{i+1}$. Dies ist die gesuchte analytische Fortsetzung. □

Definition 5.4. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to U$ ein Weg. Wir definieren*

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = F_b(\gamma(b)) - F_a(\gamma(a))$$

wobei F_a eine Stammfunktion von f in einer Umgebung von $\gamma(a)$ ist und F_b die analytische Fortsetzung von F_a entlang γ.

Lemma 5.5. *Sei $\gamma : [a, b] \to U$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann stimmen die beiden Definition von $\int_\gamma f \mathrm{d}z$ überein.*

Beweis: Beide Definition verhalten sich gut unter dem Aneinandersetzen von Wegen. Daher genügt es den Fall zu betrachten, dass γ stetig differenzierbar ist. Zur Konstruktion der analytischen Fortsetzung wähle wir unsere Folge $a = t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = b$. Wir wählen $s_i \in B_{\varepsilon_i}(\gamma(t_i)) \cap B_{\varepsilon_{i+1}}(\gamma(t_{i+1}))$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und unterbrechen unsere Integrale in diesen Punkten. Daher genügt es, den Fall zu betrachten, dass U eine Kreisscheibe ist. Dann hat f eine globale Stammfunktion F, und es gilt

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Homotopie

Die analytische Fortsetzung ändert sicht offensichtlich nicht, wenn wir die den Weg linear umparametrisieren, also $\gamma(a + ct)$ statt $\gamma(t)$. Daher genügt es ab jetzt, Wege auf $[0, 1]$ zu betrachten.

Definition 5.6. *Sei X ein topologischer Raum. Zwei Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 heißen* homotop*, wenn es eine stetige Abbildung*

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

gibt, so dass $H(t,0) = \alpha(t)$, $H(t,1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0,1]$, $H(0,\tau) = z_0$, $H(1,\tau) = z_1$ für alle $\tau \in [0,1]$.

Für festes τ ist also $\gamma_\tau : t \mapsto H(t,\tau)$ ein Weg von z_0 nach z_1.

Bemerkung. Es gibt auch den Begriff der freien Homotopie, bei der Anfangs- und Endpunkt nicht festgehalten werden. Er ist für unsere Zwecke nicht richtig. Außerdem kann man Homotopien von geschlossenen Wegen betrachten, bei denen jedes γ_τ geschlossen ist, aber nicht notwendig für alle τ mit demselben Anfangspunkt. Sie sind tatsächlich nützlich für unsere Zwecke. Unsere Sätze lassen sich ohne zu viel Mühe auf diesen Fall verallgemeinern.

Lemma 5.7. *Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege von z_0 nach z_1.*

Beweis: Reflexivität: Sei γ ein Weg. Dann ist $H(t,\tau) = \gamma(t)$ eine Homotopie von γ nach γ.
Symmetrie: Sei H eine Homotopie von α nach β. Dann ist $H'(t,\tau) = H(t, 1-\tau)$ eine Homotopie von β nach α.
Transitivität: Sei F eine Homotopie von α nach β. Sei G eine Homotopie von β nach γ. Wir definieren eine Homotopie H:

$$H(t,\tau) = \begin{cases} F(t,2\tau) & 0 \le \tau \le 1/2 \\ G(t,2\tau-1) & 1/2 \le \tau \le 1 \end{cases}.$$

□

Besonders wichtig ist der Fall von geschlossenen Wegen.

Definition 5.8. *Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ fest. Ein geschlossener Weg γ von x_0 nach x_0 heißt* null-homotop*, wenn er homotop zum konstanten Wegn $\gamma_0(t) = x_0$ ist. Ein topologischer Raum X heißt* einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und jeder geschlossene Weg von x_0 nach x_0 null-homotop ist.*

Beispiel. (i) Sei U konvex. Dann sind in U je zwei Wege von z_0 nach z_1 homotop:

$$H(t,\tau) = \tau\alpha(t) + (1-\tau)\beta(t).$$

U ist also einfach zusammenhängend.

(ii) In $\mathbb{C}^*$ ist der Weg entlang des Einheitskreises nicht homotop zum konstanten Weg. (Nicht ganz offensichtlich, wird aus unseren Sätze folgen.)

(iii) Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend, wenn man sie durch einen einzigen "Schnitt" entlang eines Weges in mehrere Zusammenhangskomponenten zerlegen kann. Aussagen dieser Art werden in der Topologie bewiesen. Wir werden diese Charakterisierung nicht zeigen.

Bemerkung. Durch das Verknüpfen von Wegen wird die Menge $\pi_1(X, x_0)$ von Homotopieklassen von geschlossenen Wegen zu einer Gruppe, der *Fundamentalgruppe*. Sie ist für uns nicht so wichtig. Der Vollständigkeit halber tragen wir die Formeln nach: Sei α eine Weg von z_0 nach z_1 und β ein Weg von z_1 nach z_2. Dann defineren wir

$$\begin{aligned} \alpha.\beta : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \alpha^{-1} : [0,1] \qquad \to X \\ t &\mapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass der Verknüpfung assoziativ ist und $\alpha.\alpha^{-1}$ und $\alpha^{-1}.\alpha$ homotop zum konstanten Weg $\alpha(0)$ ist.

Theorem 5.9 (Monodromiesatz). *Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ zwei Wege von z_0 nach z_1. Sei $f : U_0 \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von z_0. Sei $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Homotopie von α nach β. Die Funktion f sei entlang jedes Weges $\gamma_\tau = H(\cdot, \tau)$ analytisch fortsetzbar nach z_1. Dann stimmen die analytischen Fortsetzung entlang α und β in einer Umgebung von z_1 überein.*

Korollar 5.10. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f auf U eine Stammfunktion. Äquivalent: Der Cauchysche Integralsatz gilt für alle geschlossenen Wege in U.*

Beweis: Sei $\gamma : [0,1] \to U$ geschlossen. Nach Voraussetzung ist γ homotop zum konstanten Weg $\gamma(0)$. Nach dem Monodromiesatz ist

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \int_{\gamma(0)} f \mathrm{d}z = 0.$$

□

Beweis des Monodromiesatzes. Wir betrachten $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, eine Homotopie von Wegen von z_0 nach z_1. Sei f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von z_0. Nach Voraussetzung lässt sich f analytisch fortsetzen nach z_1 entlang jedes $\gamma_\tau = H(\cdot, \tau)$. Wir betrachten die Menge T der $\tau \in [0,1]$, so dass die analytische Fortsetzung von f nach z_1 mit der analytischen Fortsetzung entlang γ_0 übereinstimmt. Wegen $0 \in T$ ist die Menge nicht leer.

Behauptung. *T ist offen in* $[0,1]$.

Sei $\tau_0 \in T$. Nach Definition von T gibt es Punkte $a = t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = b$, Kreisscheiben $B_i = B_{\varepsilon_i}(\gamma_{\tau_0}(t_i))$ und holomorphe Funktionen $f_i : B_i \to \mathbb{C}$

wie in der Definition der analytischen Fortsetzung. Da H stetig ist, sind die Urbilder $V_i = H^{-1}(B_i)$ offen in $[0,1] \times [0,1]$. Wir wählen Punkte $t_i \leq s_i \leq t_{i+1}$, so dass $\gamma_{\tau_0}(s_i)$ im Schnitt der Kreisscheiben von $\gamma_{\tau_0}(t_i)$ und γ_{τ_0} liegen. Da das Intervall $[s_i, s_{i+1}] \subset V_i$ kompakt ist, enthält V_i einen Streifen der Form $[s_i, s_{i+1}] \times \delta_i$. Sei δ das Minimum der δ_i. Für $|\tau - \tau_0| < \delta$ überdecken dann die Kreisscheiben $B_{\varepsilon_i}(\gamma_{\tau_0}(t_i))$ auch den Weg γ_τ. Die Funktionen f_i legen die analytische Fortsetzung von f entlang γ_τ fest. Daher liegt auch τ in der Menge T.

Behauptung. *T ist abgeschlossen in $[0,1]$.*

Sei $\tau_0 \in [0,1]$ ein Häufungspunkt von T. Sei $T' \subset [0,1]$ die Menge der τ, so dass die analytische Fortsetzung entlang γ_τ mit der analytischen Fortsetzung entlang γ_{τ_0} übereinstimmt. Wie im letzten Schritt gezeigt, ist T' offen in $[0,1]$. Da τ_0 ein Häufungspunkt von T ist, enthält T' einen Punkt von T. Daher stimmt die analytischen Fortsetzung entlang γ_{τ_0} mit der entlang γ_0 überein.
Als abgeschlossenen und offene Teilmenge von $[0,1]$ ist $T = [0,1]$.

$\square$

Beispiel. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Weg von z_0 nach z_0. Wir wollen

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z$$

berechnen. Sei γ_0 ein Weg von 1 nach z_0. Der Wert des Integrals verändert sich nicht, wenn wir zunächst entlang γ_0 laufen, dann entlang γ und dann rückwärts entlang γ_0 zurück. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $z_0 = 1$. Der Weg γ ist homotop zu γ_1 mit $\gamma_1(t) = \gamma(t)/|\gamma(t)|$. Der Weg verläuft daher ohne Einschränkung entlang des Einheitskreises. Wir können ihn schreiben als

$$\gamma(t) = \exp(2\pi i \phi(t))$$

wobei $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\phi(0) = 0$, $\phi(1) \in \mathbb{Z}$. Sei $\phi(1) = n$. Da $\mathbb{R}$ konvex ist, gibt es eine Homotopie von ϕ zum geraden Weg $\psi(t) = tn$, nämlich $H(t,\tau) = \tau\phi(t) + (1-\tau)tn$. Das Bild unter $\exp(2\pi i \cdot)$ ist dann eine Homotopie von γ zu dem Weg der Form

$$\tilde{\gamma}(t) = \exp(2\pi i t n).$$

Wir erhalten daher

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{\exp(2\pi i t n)} 2\pi i n \exp(2\pi i t n) \mathrm{d}t = 2\pi i n.$$

Definition 5.11. *Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus z_0$ ein geschlossener Weg. Dann heißt*

$$n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

Umlaufzahl *von γ um z_0.*

Wie wir gerade im Beispiel gesehen haben, misst diese analytisch definierte Umlaufzahl das, was wir intuitiv darunter verstehen würden.

Bemerkung. Dies ist ein erstes, bereits sehr wichtiges Beispiel für ein allgemeineres Prinzip. Rein topologische Eigenschaften (wie oft läuft der Weg um z_0 herum?) lassen sich analytisch ausrechenen. Oder umgekehrt: analytisch definierte Größen hängen nur von einer topologische Invariante ab.

Logarithmus und Wurzeln

Die Logarithmusfunktion haben wir bereits diskutiert. Wir halten die übliche Sprechweisen fest.

Sei $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die geschlitzte Ebene. Sie ist einfach zusammenhängend, daher hat $1/z$ eine Stammfunktion auf G. Wir wählen die Stammfunktion mit Wert 0 in 1 und erhalten so eine analytische Fortsetzung von log, den *Hauptzweig* des Logarithmus. Jede andere Stammfunktion hat die Form $2\pi i n + \log(z)$ für $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Dies sind die *Nebenzweige*. Allgemeiner existiert Logarithmus auf jeder einfach zusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Oft benutzt man die geschlitzten Ebenen $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^{>0} z_0$ für $z_0 \neq 0$. Für variierende z_0 überdeckt man so ganz $\mathbb{C}^*$.

Lemma 5.12. *Sei $U \subset \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, $\log : G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus auf U. Dann gilt*

$$\exp(\log(z)) = z$$

für alle $z \in G$.

Beweis: Die Identität gilt auf $\mathbb{R}^{>0}$ für jeden Zweig des Logarithmus. Im allgemeinen beweisen wir sie durch analytische Fortsetzung entlang eines Weges von 1 nach G. Genauer: Ohne Einschränkung ist U wegzusammenhängend. Sei γ ein Weg in $\mathbb{C}^*$ mit $\gamma(0) \in U$, $\gamma(1) = 1$. Wir setzen unseren Zweig des Logarithmus analytisch fort entlang γ nach 1. Dort gilt die Identität in einer Umgebung von 1. Wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung gilt sie dann auch in U. □

Bemerkung. Die übliche Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\log(z) + \log(z') = \log(zz')$$

gilt im allgemeinen nur bis auf einen Summanden der Form $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sobald wir Logarithmus kennen, können wir auch Wurzeln definieren.

Definition 5.13. *Sei $U \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig* log *des Logarithmus existiert. Sei $b \in \mathbb{C}$. Dann heißt*

$$z \mapsto \exp(b \log(z)) =: z^b$$

Zweig der b-ten Potenz auf U. Ist $n \in \mathbb{N}$, so heißt $z \mapsto z^{1/n}$ auch Zweig der n-ten Wurzel.

Dies lässt sich z.B. auf jede Kreisscheiben anwenden, die 0 nicht enthält.

Lemma 5.14. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(z^{1/n})^n = z.$$

Je zwei Wahlen einer n-ten Wurzel unterscheiden sich um einen Faktor ζ wobei $\zeta^n = 1$.

Beweis: Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt

$$(z^{1/n})^n = \exp(\frac{1}{n}\log(z))^n = \exp(n\frac{1}{n}\log(z)) = \exp(\log(z)) = z.$$

In jedem Punkt unterscheiden sich zwei Zweige um Multiplikation mit einer Einheitswurzel, da sie beide die Funktionalgleichung erfüllen. Der Quotient der beiden ist holomorph auf dem Gebiet, daher muss die Einheitswurzel immer diesselbe sein. □

Satz 5.15 (Lokale Gestalt)**.** *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer k-fachen Nullstelle in z_0. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit einer einfachen Nullstelle in z_0, so dass*

$$f(z) = (h(z))^k$$

in U_0.

Beweis: Ohne Einschränkung ist $z_0 = 0$. Nahe 0 hat f die Form

$$z \mapsto z^k g(z)$$

wobei $g(0) \neq 0$. Wir wählen U als Kreisscheibe, so dass g keine Nullstelle in U_0 hat. Wir betrachten $g(U)$. Sie enthält 0 nicht. Sei V eine Kreisscheibe um $g(z_0)$, die 0 nicht enthält. Sei U_0 das Urbild $g^{-1}(V)$. Auf V existiert eine k-te Wurzel. Daher können wir setzen

$$h(z) = z(g(z))^{1/k}.$$

□

Bemerkung. Die Bedeutung dieses Satzes wird klarer, wenn man in der Sprache der Mannigfaltigkeiten denkt: In geeigenten Koordiaten hat jede holomorphe Abbildung ungleich 0 die Form $z \mapsto z^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dies sieht man so: Die Funktion h erfüllt $h'(z_0) \neq 0$, daher ist sie in einer Umgebung von z_0 biholomorph, d.h. sie hat eine holomorphe Umkehrabbildung. Wir wählen h als Koordinate.

Wir tragen nach:

Lemma 5.16. *Sei $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_0 von z_0, so dass $h|_{U_0}$ bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung.*

Beweis: Wir betrachten h als reell differenzierbare Funktion mit totaler Ableitung $Dh(z_0)$ in z_0. Es gilt

$$0 \neq |h'(z_0)| = |\det Dh(z_0)|.$$

Aus Analysis 2 wissen wir daher, dass h nahe bei z_0 bijektiv ist, mit differenzierbarer Umkehrfunktion g. Wir überprüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, am leichtesten, indem wir mit der Wirtinger Ableitung arbeiten. Es ist $g \circ f = \mathrm{id}$ holomorph, daher gilt für alle c mit $h'(c) \neq 0$

$$0 = \frac{\partial g \circ f}{\partial \overline{z}}(c) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(c)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(c)) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(c)$$

Der erste Summand verschwindet, da f holomorph ist. Der Faktor $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(c)$ ist komplex konjugiert zu $f'(c_0) \neq 0$. Daher verschwindet $\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}$ in $f(c)$ und die Umkehrfunktion ist holomorph. □

Korollar 5.17 (Blätterzahl)**.** *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer k-fachen Nullstelle in z_0. Dann gibt es zu jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U_ε von z_0, die durch f auf die Kreisscheibe $B_\varepsilon(0)$ abgebildet wird, und zwar so, dass $f|_{U_\varepsilon}$ jeden Wert ungleich 0 in $B_\varepsilon(0)$ genau k mal annimmt und 0 genau in z_0.*

Beweis: Sei ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Die Aussage ist wahr für $f(z) = z^k$. Im allgemeinen schreiben wir $f(z) = (h(z))^k$ mit h holomorph mit $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$. Nahe 0 ist h holomorph mit holomorpher Umkehrfunktion (Kettenregel!). Wir wählen Umgebungen U von 0 und V von $h(0) = 0$, so dass $h : U \to V$ bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $B = B_{\sqrt[k]{\varepsilon}}(0) \subset V$. Wir setzen U_ε das Urbild dieser Kreisscheibe unter h. Diese Umgebung hat die gewünscht Eigenschaft. □

Bemerkung. Der Satz über Blätterzahl enthält einen zweiten Beweis von Gebietstreue.

Kapitel 6

Residuensatz

Es ist oft besser, allgemeinere Integrationen als die über einzelne Wege zu betrachten.

Definition 6.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine* Kette *ist eine formale Linearkombination*

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i$$

mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ Wege. Sie heißt Zyklus*, wenn die formale Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma_i(1) - \gamma_i(0)$ verschwindet.*
Für eine Kette Z wie oben und holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\int_Z f \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\gamma_i} f \ dz.$$

Zwei Zykel heißen homolog*, wenn für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_\alpha f \mathrm{d}z = \int_\beta f \mathrm{d}z.$$

Sei $H_1(Z, \mathbb{Z})$ die Menge der Homologieklassen von Zykeln.

Bemerkung. Sind α, β verknüpfbare Wege in U, also $\alpha(1) = \beta(0)$, so gilt

$$\int_{\alpha.\beta} f \mathrm{d}z = \int_{\alpha+\beta} f \mathrm{d}z.$$

Der Monodromiesatz impliziert also, dass homotope Wege homolog sind. Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_1(U, z_0) \to H_1(Z, \mathbb{Z}).$$

Bemerkung. Sei $\sum_{i=1}^n a_i\gamma_i$ ein Zykel. Ohne Einschränkung sind alle $a_i \neq 0$. Indem wir gegebenenfalls $a_i\gamma_i$ durch $-a_i\gamma_i^{-1}$ ersetzen, erreichen wir, dass alle $a_i > 0$. Wir betrachten γ_i. Der Endpunkt $\gamma_1(1)$ hat die Vielfachheit a_1. Er muss daher als Anfangspunkt eines anderen Weges γ_i vorkommen. Ist $i = 1$, so ist der Weg γ_1 geschlossen. Andernfalls ist es ohne Einschränkung γ_2. Wir verknüpfen die beiden Wege. Unser Zykel ist homolog zu

$$\gamma_1.\gamma_2 + (a_1 - 1)\gamma_1 + (a_2 - 1)\gamma_2 + a_2\gamma_3 + \cdots + a_n\gamma_n.$$

Wir wiederholen dieses Verfahren. Es muss nach endlich vielen Schritten enden, da die $\sum_{i=1}^n a_n$ mit jedem Schritt kleiner wird. Insgesamt ist der Zykel dann homolog zu einem Zykel der Form

$$\sum_{i=1}^m b_j\alpha_j$$

wobei alle α_j geschlossen sind. Dies erklärt die Terminologie. Wenn U wegzusammenhängend ist, so können wir noch weiter vereinfachen. Wir wählen eine Basispunkt $z_0 \in U$ und Wegen β_j von z_0 nach $\alpha_j(0)$. Dann ist unser Zykel homolog zu dem geschlossenen Weg

$$\beta_1.\alpha_1^{b_1}.\beta_1^{-1}.\ldots.\beta_n\alpha_n^{b_n}\beta_n^{-1}.$$

Mit anderen Worten: die Abbildung

$$\pi_1(U, z_0) \to H_1(U, \mathbb{Z})$$

ist surjektiv für wegzusammenhängendes U.

Im letzten Kapitel haben wir den Begriff der Umlaufzahl eingeführt. Dies verallgemeinert sich jetzt auf Zykel.

Definition 6.2. *Sei $Z = \sum_{i=1}^n a_i\gamma_i$ ein Zykel. Sei z_0 ein Punkt, der von keinem der Wege γ_i getroffen wird. Dann definieren wir die* Umlaufzahl *von Z um z_0 als*

$$n_Z(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_Z \frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$

Ist $n_Z(z_0) = 0$, so sagen wir, dass Z den Punkt z_0 nicht umläuft.

Wählen wir die γ_i geschlosssen, so erhalten wir die Formel

$$n_Z(z_0) = \sum_{i=1}^n a_i n_{\gamma_i}(z_0).$$

Beispiel. (i) Sei U einfach zusammenhängend, $z_0 \notin U$. Dann umläuft kein Zykel in U den Punkt z_0, da alle geschlossenen Wege in U nullhomotop sind.

(ii) Sei $Z = \partial B_R(z_0) - \partial B_r(z_0)$ mit $r < R$ und z_0 ein Punkt mit $|z - z_0| < r$ oder $|z - z_0| > R$. Dann umläuft Z den Punkt z_0 nicht.

(iii) Sei Q ein Qudarat. Sein Rand umläuft jeden Punkt im Inneren genau einmal, jeden Punkt im Äußeren nicht.

(iv) Zu jedem Zykel Z gibt es ein R, so dass für $|z| > R$ folgt, dass Z den Punkt z nicht umläuft, denn alle Wege des Zykels liegt in einer Kreisscheibe $B_R(0)$.

Theorem 6.3 (Umlaufzahlversion des Integralsatzes)**.** *Sei G ein Gebiet in G. Sei Z ein Zykel in G, der keinen Punkt des Komplements von G umläuft. Dann gilt*

$$\int_Z f \mathrm{d}z = 0$$

für alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$.

Bemerkung. Die Bedingung ist auch notwendig. Umläuft Z den Punkt z_0 außerhalb G, so verschwindet das Integral über $1/(z - z_0)$ nicht.

Als Spezialfälle erhalten wir die Formeln für konvexe Gebiete und für Kreisringe zurück.

Beweis: Wir legen eine Qudratgitter mit Breite ein (genügend kleines) ε über die komplexe Ebene. Ein Kantenzykel ist ein Zykel der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i$$

wobei $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{C}$ die Verbindundstrecke zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten ist.

Behauptung. *Z ist homolog zu einem Kantenzykel.*

Wir haben bereits gesehen, dass Z homolog ist zu einer Linearkombination von geschlossenen Wegen. Wir konstruieren nun zu einem geschlossenen Weg eine homotopen geschlossenen Kantenweg. Dieser definiert dann einen Kantenzykel.

Zunächst wählen wir das Gitter. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass jeder Punkt von $\gamma([0, 1])$ von $\mathbb{C} \smallsetminus G$ den Abstand mindestens 3ε hat. Wir legen ein achselnparalleles ε-Gitter über $\mathbb{C}$. Ohne Einschränkung liegt $\gamma(0)$ in einem Eckpunkt (wir verbinden einfach). Liegt $\gamma(t)$ in einem (abgeschlossenen) Achsenquadrat dieses Gitters, so liegen auch noch die acht angrenzenden Achsenquadrate ganz in G.

Zu ε gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|t - t'| < \delta$ impliziert $|\gamma_i(t) - \gamma_i(t')| < \varepsilon$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$, so dass $1/n < \delta$ und unterteilen $[0, 1]$ mit den Teilpunkten $t_i = i/n$. Auf den Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$ variiert γ dann um höchstens ε, bleibt also in den acht Nachbarquadraten um $\gamma(t)$.

Für $i = 0, \ldots, n$ sei e_i die Gitterecke, die am nächsten an $\gamma(t_i)$ liegt. Wähle einen Weg $\tilde{\gamma}$ auf $[t_i, t_{i+1}]$ entlang der Kanten, der e_i mit e_{i+1} verbindet. Die beiden Wege γ und $\tilde{\gamma}$ sind homotop entlang geradliniger Verbindungslinien. Diese verlaufen vollständig in G. Dieses $\tilde{\gamma}$ ist der gesuchte Kantenweg.

Offensichtlich lässt sich die Konstruktion auch auf mehrere geschlossene Wege gleichzeitig anwenden. Damit haben wir unseren Kantenzykel gefunden.

Behauptung. *Ohne Einschränkung umläuft Z keinen Punkt in $\mathbb{C}$.*

Die Menge der umlaufenen Punkte ist beschränkt. Dies impliziert, das Z nur endlich viele Quadrate umläuft. Wird ein Quadrat umlaufen, so muss es ganz in G liegen, denn andernfalls enthält es Punkt außerhalb von G, die nach Voraussetzung nicht umlaufen werden. Seien $Q_1, \dots, \mathbb{Q}_n$ die Quadrate, die von Z umlaufen werden, jeweils mit Vielfachheit n_i. Wir ersetzen Z durch den Zykel $Z - n_i \partial Q_i$. Dies verändert das Integral nicht, da $\int_{\partial Q_i} f dz = 0$ da der Randweg von Q_i null-homotop ist. Der neue Zykel umläuft keinen Punkt aus $\mathbb{C}$ mehr.

Der Zykel hat nun die Form $\sum_{i=1}^n a_i \gamma_i$, wobei γ_i zwei benachbarte Kanten des Gitters verbindet. Ohne Einschränkung kommen nur eine der Kanten γ_i und γ_i^{-1} vor.

Behauptung. *Für einen solchen Kantenzykel ändert sich die Umlaufzahl von Z um $\pm a_i$ beim Überschreiten von γ_i.*

Wir betrachten ohne Einschränkung $\varepsilon = 1$ und die Kante $[0, 1]$ und die Quadrate Q_1 über und Q_2 unter ihr. Nach Vorrausetzung trifft Z das Innere der beiden Quadrate nicht und keine andere Komponente von Z ist gleich $[0, 1]$ oder $[1, 0]$. Sei a die Vielfachheit von $[0, 1]$ in Z.

Sei $Z' = Z - \partial Q_2$. Die Kante $[0, 1]$ wird also um das untere Quadrat herum umgeleitet. Dann gilt

$$n_{Z'}(z) = n_Z(z) - n_{\partial Q_2}(z) = \begin{cases} n_Z(z) & z \in Q_1 \\ n_Z(z) - a & z \in Q_2 \end{cases}.$$

Behauptung. *Der Zykel ist null-homolog.*

Die Umlaufzahl bleibt beim Überschreiten von γ_i gleich, da sie überall 0 ist. Also ist $a_i = 0$. □

Theorem 6.4 (Residuensatz)**.** *Sei G ein Gebiet. Sei f eine Funktion mit isolierten Singularitäten in G, d.h. holomorph auf $G \setminus S$, wobei $S \subset G$ aus isolierten Punkten besteht.*

Sei γ ein Zykel in $G \setminus S$, der keinen Punkt außerhalb G umläuft.

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{s \in S} n_\gamma(s) \mathrm{res}_s(f).$$

Beweis: Wir klären zunächst, dass die Summe endlich ist. Ohne Einschränkung enthält S nur Punkte, in denen f keine hebbare Singularität hat. Wir betrachten die Menge der $s \in S$ gibt, die von γ umlaufen werden. Die Menge der Punkte, die umlaufen werden ist beschränkt. Wären es unendlich viele, so hätte die die Menge dieser S einen Häufungspunkt a. Dieser kann nicht in S liegen, da die Punkte in S (dann auch a) isoliert sind. Er kann nicht in $G \setminus S$ liegen, denn dann ist f holomorph in a und auch holomorph in einer Umgebung von a. Folglich liegt a im Komplement von G. Nach Voraussetzung wird a nicht umlaufen. Der Abstand von a von γ ist positiv. Es gibt dann eine kleine Umgebung von a, in der die Umlaufzahl ebenfalls verschwindet. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von a als Häufungspunkt einer Menge von umlaufenen Punkten.

Sei nun $s_1, \dots, s_n$ die Menge der Elemente von S, die von γ umlaufen werden. Für jedes s_i wählen wir einen Kreisweg $\gamma_i = \partial B_{r_i}(s_i)$, so dass eine Umgebung der punktierten Kreisscheibe in $G \setminus S$ liegt. Er umläuft s_i, aber kein anderes Element im Komplement von $G \setminus S$. Sei

$$\tilde{\gamma} = \gamma - n_\gamma(s_i)\gamma_i.$$

Dieser Zykel umläuft keinen Punkt außerhalb G, das es weder γ noch die γ_i tun. Er umläuft auch kein $s \in S$. Damit erfüllt dieser Zykel die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes in der Umlaufzahlversion im Gebiet $G \setminus S$. Es folgt

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} n_\gamma(s_i) \int_{\gamma_i} f \mathrm{d}z.$$

Die Berechnung des Integrals über γ_i ergibt $2\pi i \mathrm{res}_{s_i} f$ nach Babyversion des Residuensatzes aus Kapitel 4 über Laurent-Reihen. □

Anwendung auf unbestimmte reelle Integrale

Wir beginnen mit einem Beispiel. Ziel ist die Berechnung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

Hierfür betrachten wir einen Integrationsweg γ_R, der zunächst entlang der reellen Achse von $-R$ nach R läuft, dann entlang des Halbkreises mit Radius R in der oberen Halbene zurück. Wir wählen $R > 1$. Das Wegintegral berechnen wir mit dem Residuensatz für das Gebiet $\mathbb{C}$. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat isolierte Singularitäten in $\pm i$. Es ist also

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} \mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{res}_i \frac{1}{1+z^2}.$$

Es ist

$$\lim_{z \to i} f(z)(z-i) = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Also hat f einen einfachen Pol in i. Wir vergleichen mit der Laurenreihenentwicklung $f(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} a_j (z-i)^j$ und erhalten

$$\mathrm{res}_i(f) = a_{-1} = \lim_{z \to i} f(z)(z-i).$$

Das Endergebnis ist also

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} \mathrm{d}z = \pi.$$

Eigentlich sind wir aber an dem reellen Anteil interessiert. Wir zeigen, das für große R der Halbkreis nicht beiträgt. Es gilt

$$|z^2+1| \geq |z^2| - 1 \geq \frac{1}{2}|z^2|$$

für $|z| \geq \sqrt{2}$ und für diese z daher

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|z|^2}.$$

Für das Integral über den Halbkreisweg zum Radium $R > \sqrt{2}$ erhalten wir daher die Abschätzung

$$\int \leq \pi R \frac{1}{2} \frac{1}{R^2} = \frac{1}{2R}.$$

Im Grenzwert $R \to \infty$ verschwindet dieser Beitrag, und es bleibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \pi.$$

Allgemein:

Satz 6.5. *Sei f eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat und deren Nennergrad wenigstens zwei größer als der Zählergrad ist. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Beweis: Wir gehen genau wie im Beispiel vor. Da f rational ist, gibt es nur endlich viele Polstellen. Sobald der Radius groß genug ist, sind alle Polstellen der oberen Halbebene schon im Inneren des Halbkreises enthalten. Im Unendlichen hat f eine Nullstelle der Ordnung 2 und fz^2 immer noch eine hebbare Singularität, ist also beschränkt nahe ∞. Dies bedeutet, dass ein $C > 0$ gibt und ein $R > 0$, so dass für $|z| > R$ folgt

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

Damit kann wie im Beispiel abgeschätzt werden. □

Bemerkung. Die gleiche Methode lässt sich manchmal auch auf nicht-rationale Funktionen anwenden.

Satz 6.6. *Sei f eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat und deren Nennergrad wenigstens eins größer als der Zählergrad ist. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{res}_a R(z) e^{iz}.$$

Beweis: Wir integrieren diesmal über ein Rechteck, zusammengesetzt aus den Strecken $\gamma_1 = [-R, R]$, $\gamma_2 = [R, R + iR]$, $\gamma_3 = [R + iR, -R + iR]$, $\gamma_4 = [-R + iR, -R]$. Wieder hat der Integrand nur endlich viele Polstellen. Für genügend großes R liegen alle Polstellen von $g(z) = f(z)e^{iz}$ in der oberen Halbebene bereits in dem Rechteck. Wir wollen zeigen, dass für $R \to \infty$ die Integrale über die Wege γ_2, γ_3 und γ_4 nicht beitragen. Ihre Länge wächst linear mit R. Gleichzeitig haben wir

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|}$$

für $|z|$ genügend groß und ein geeignetes c. Außerdem ist

$$|e^{iz}| = \exp(-\mathrm{Im}(z)).$$

Entlang γ_3 ist dieser Imaginärteil konstant. Daher

$$\left|\int_{\gamma_3} f(z)e^{-iz}\mathrm{d}z\right| \leq 2R\frac{c}{R}e^{-R} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Entlang γ_2 rechen wir genau. Der Weg ist $t \mapsto R + it$ mit $\gamma_2'(t) = i$.

$$\int_{\gamma_2} f(z)e^{iz}\mathrm{d}z = \int_0^R f(R+it)e^{iR-t)}i\mathrm{d}t$$

Wir schätzen ab gegen

$$\int_0^R |f(R+it)|e^{-t} \leq \frac{c}{R}\int_0^R e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{c}{R}(-e^{-R} + e^0) = \frac{c}{R}(1 - e^{-R}$$

Auch hier verschwindet der Grenzwert für $R \to \infty$. □

Noch schwieriger wird es, wenn das rationale f auf der reellen Achse Pole hat, wie z.B. $\frac{1}{x^2-1}$ oder$\frac{\sin(x)}{x}$.

Beispiel. Das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ ist definiert als Summe der uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{0} x^{-1}\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-1}\mathrm{d}x = \log|x|\Big|_{-1}^{0} + \log|x|\Big|_0^1 = \infty - \infty.$$

Ein Blick auf den Graphen sagt aber, dass die Fläche unter dem Graphen aus Symmetriegründen verschwindet. Der Grenzwert

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$$

für $\varepsilon \to 0$ existiert.

Definition 6.7. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes oder abgschlossenes Intervall. Sei $f : I \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Falls*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x \leq p-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x \geq p+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

existiert, so heißt der Grenzwert Hauptwert *des Integrals.*

Satz 6.8. *Sei f eine rationale Funktion, der Zählergrad mindestens um zwei kleiner als der Nennergrad ist. Sein $p_1, \ldots, p_n$ die Pole von f auf der reellen Achse, und diese Pole seien einfach. Dann existiert der Hauptwert von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ und ist gegeben durch*

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z > 0} \mathrm{res}_z f + \pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{p_i} f.$$

Proof. Wir modifizieren den Beweis von Satz 6.5. Den dortigen γ_R (Strecke $[-R, R]$, dann Halbkreis in der oberen Halbebene) modifizieren wir durch kleine Halbkreise in der oberen Halbkreise mit Radium ε um jedes p_i. Wir wählen R groß, so dass alle Polstellen der oberen Halbebene im Kreis mit Radius R. Wir wählen ε klein, so dass $B_\varepsilon(p_j)$ keine andere Polstelle enthält. Für festes ε erhalten wir wie dort

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z>0} \mathrm{res}_z f.$$

Wie dort trägt für $R \to \infty$ das Integral über den großen Halbkreis nicht bei.

Wir behandeln nun den Grenzwert $\varepsilon \to 0$. Sei γ_j der Weg $t \mapsto p_j + \varepsilon \exp_{\pi i(1-t)}$ für $t \in [0, 1]$ Nahe p_j schreiben wir f als

$$f(z) = \frac{c}{z - p_j} + g(z)$$

wobei g holomorph in p_j. Insbesondere ist g beschränkt durch eine Konstante C, und daher

$$\left| \int_{\gamma_j} g(z)\mathrm{d}z \right| \leq \varepsilon \pi C \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Für den ersten Summanden rechnen wir explizit:

$$\int_{\gamma_j} \frac{c}{z - p_j} \mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{c}{\exp(\pi i(1-t))} (-\pi i) \exp(\pi i(1-t))\mathrm{d}t = -\pi i c.$$

Also:

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z>0} \mathrm{res}_z f = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{R \to 0} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\mathrm{d}z = \text{Hauptwert} - \pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{p_j} f.$$

□

Ein anderer Trick wird für Integrale über die positive Halbachse verwendet.

Beispiel. Wir wollen
$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$$
berechnen. Entscheidend ist, dass $z^{1/2}$ nicht auf ganz $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ definiert ist. Wir benutzen einen Zweig auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^{>0}$, so dass für $x \in \mathbb{R}^{>0}$ und eine Folge z_n mit $\mathrm{Im} z_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ gilt $z_n^{1/2} \to \sqrt{x}$.
Wir wählen folgenden geschlossenen Weg γ: Entlang der Geraden $\mathrm{Im} z = \varepsilon$ von $|z| = r$ bis $|z| = R$; entlang des Kreises mit Radius R bis zu $\mathrm{Im} z = -\varepsilon$; entlang der Geradem $\mathrm{Im} z = -\varepsilon$ zurück bis $|z| = r$; entlang des Kreises mit Radius r (negativ orientiert) zurück zum Ausgangspunkt. Wir nennen die Teilstücke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Dann gilt
$$\int_\gamma \frac{z^{1/2}}{z^2+1}\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{res}_i \frac{z^{1/2}}{1+z^2} + 2\pi i \mathrm{res}_{-i} \frac{z^{1/2}}{1+z^2}.$$
Für $\varepsilon \to 0$ nähert sich $\int_{\gamma_1}$ dem Integral $\int_r^R \frac{x^{1/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ an. Im Grenzwert $r \to 0$, $R \to \infty$ ist dies das gesuchte Integral. Ähnlich für $\int_{\gamma_3}$. Das Integral nähert sich $\int_R^r$ an. Wir haben es aber mit dem anderen Zweig von $z^{1/2}$ zu tun, also im Grenzwert mit $\int_R^r \frac{-x^{1/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Für $\varepsilon \to 0$ stimmen also die Integrale über γ_1 und γ_3 überein.
Für große R wächst der Integrand wie $R^{1/2-2}$, die Weglänge wie R. Das genügt, um $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{z^{1/2}}{1+z^2}\mathrm{d}z = 0$ zu erhalten. Für kleine r ist der Faktor $\frac{1}{1+z^2}$ beschränkt, zB. durch 2. Daher
$$\left| \int_{\gamma_3} \frac{z^{1/2}}{1+2^2}\mathrm{d}z \right| \leq (2\pi r) 2 r^{1/2} \xrightarrow{r\to 0} 0.$$
Zusammen:
$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi i \left(\mathrm{res}_i \frac{z^{1/2}}{1+z^2} + \mathrm{res}_{-i} \frac{z^{1/2}}{1+z^2} \right).$$
In i und $-i$ liegen einfache Pole vor, also
$$\mathrm{res}_i \frac{z^{1/2}}{1+z^2} = \lim_{z\to i} \frac{z^{1/2}(z-i)}{z^2+1} = \frac{i^{1/2}}{2i}$$
Für die Berechnung von $i^{1/2}$ schreiben wir $i = e^{\pi i/2}$ und erhalten die Wurzel $e^{\pi i/4} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)$. Das Residuum ist also
$$\frac{-i}{2} e^{\pi i/4} = -\frac{i}{2}\cos(\pi/4) + \frac{1}{2}\sin(\pi/4).$$
Genauso
$$\mathrm{res}_{-i} \frac{z^{1/2}}{1+z^2} = \lim_{z\to -i} \frac{z^{1/2}(z+i)}{z^2+1} = \frac{(-i)^{1/2}}{-2i}$$

Um den richtigen Zweig der Wurzel zu erhalten, schreiben wir $-i = e^{3\pi i/2}$ und daher $(-i)^{1/2} = e^{3\pi i/4} = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)$. Dieses Residuum ist also

$$\frac{i}{2}e^{3\pi i/4} = \frac{i}{2}\cos(3\pi/4) - \frac{1}{2}\sin(3\pi/4) = \frac{-i}{2}\cos(\pi/4) - \frac{1}{2}\sin(\pi/4).$$

Das Endergebnis ist dann

$$\pi i(-i)\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

(Ohne Gewähr).

Dieselbe Methode beweist:

Satz 6.9. *Sei $R(x)$ eine rationale Funktion, die auf $(0,\infty)$ keine Pole hat und in 0 höchstens einen einfach Pol. Sei $0 < \lambda < 1$. Dann gilt*

$$\int_0^\infty x^\lambda R(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \sum_{z\neq 0} \operatorname{res}_z(\zeta^\lambda R(\zeta)).$$

Als letztes betrachten wir Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t$$

für rationale Funktionen $R(x,y)$. Wir interpretieren $z = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ und schreiben das ganze als Kurvenintegral

$$\int_{\partial B_1(0)} R(\frac{1}{2}(z - z^{-1}), \frac{1}{2i}(z + z^{-1}))\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Nach dem Residuensatz erhalten wir als Ergebnis $2\pi i$ mal die Summe der Residuen für $|z| < 1$.

Anwendungen in der Funktionentheorie

Diese Anwendungen beruhen auf der *logarithmischen Ableitung* f'/f. Man beachte: Es ist $(\log\circ f)' = \frac{1}{f}f'$. Während die linke Seite nur lokal definiert ist, ist es die rechte immer (genauer: außerhalb der Nullstellen von f). Die Rechenregeln für die logarithmische Ableitung leiten sich ab aus denen der Logarithmus. Für $h = fg$ gilt

$$\frac{h'}{h} = \frac{fg' + f'g}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

Beispiel. Sei $f = z^k$. Dann gilt

$$\frac{f'}{f} = \frac{kz^{k-1}}{z^k} = \frac{k}{z}.$$

Wir erinnern uns: eine Funktion mit isolierten Singularitäten ist meromorph, wenn sie nur Pole (und hebbare Singularitäten) hat. In einer Umgebung von z ist dann

$$f(\zeta) = (z - \zeta)^k g(\zeta)$$

mit g holomorph, $g(\zeta) \neq 0$. Für $k > 0$ heißt k *Nullstellenordnung*. Für $k < 0$ heißt $-k$ *Polstellenordnung*. Wir fassen dies auch zusammen und nennen k einfach die *Orndung* $\mathrm{ord}_z(f)$.

Lemma 6.10. *Sei f meromorph auf G. Dann ist f'/f ebenfalls meromorph, und es gilt*

$$\mathrm{res}_z \frac{f'}{f} = \mathrm{ord}_z(f).$$

Beweis: Nahe z schreiben wir $f(\zeta) = (\zeta - z)^k g(\zeta)$ mit g holomorph, $g(z) \neq 0$. Dies ist möglich, da f meromorph ist, also in z höchstens einen Pol hat. Es folgt

$$\mathrm{res}_z \frac{f'}{f} = \mathrm{res}_z \frac{k(\zeta - z)^{k-1}}{(\zeta - z)^k} + \mathrm{res}_z \frac{g'}{g}.$$

Die Funktion g hat in ζ keine Nullstelle, also ist $1/g$ holomorph. Das zweite Residuum ist 0. $\square$

Wir wenden den Residuensatz auf die logarithmische Ableitung an und erhalten:

Satz 6.11 (Null- und Polstellenzählintegral)**.** *Sei G eine Gebiet, Z ein Zykel in G, der keinen Punkt aus $\mathbb{C} \smallsetminus G$ umläuft. Sei f eine meromorphe Funktion auf G, so dass kein Pol auf Z liegt. Dann gilt*

$$\int_Z \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{z \in G} n_Z(z) \mathrm{ord}_z(f).$$

Seien $a_1, \dots, a_n$ die Nullstellen von f, die von Z umlaufen werden, jeweils mit Nullstellenordnung k_j. Seien $b_1, \dots, b_m$ die Polstellen von f, die von Z umlaufen werden, jeweils mit Polstellenordnung l_j. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_Z \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{n} n_Z(a_j) k_j - \sum_{j=1}^{m} n_Z(b_j) l_j.$$

Beweis: Einsetzen des Lemmas in den Residuensatz. $\square$

Bemerkung. Die obige Formel hat bemerkenswerte Anwendungen. Integrale lassen sich mit numerischen Methoden berechnen. Hat man das Integral mit Genauigkeit kleiner 1/2 berechnet, so ist der echte Wert, die nächste ganze Zahl. Auf diesem Weg hat man z.B. die berühmteste Vermutung der Mathematik experimentell für riesige Intervalle überprüft. Genauer: Die Riemannsche ζ-Funktion ist definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für $\mathrm{Re} z > 1$. Ähnlich wie bei Potenzreihen folgt, dass es sich eine holomorphe Funktion handelt. Sie hat eine analytische Fortsetzung nach $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$. In 1 hat sie einen einfachen Pol mit Residuum 1. Eine Funktionalgleichung verbindet die Werte in z und $1-z$. Für $\mathrm{Re} z > 1$ hat sie keine Nullstellen. Die Nullstellen für $\mathrm{Re} z < 0$ sind bekannt. Die sogenannten *nicht-trivialen* Nullstellen sind die im *kritischen* Streifen $0 < \mathrm{Re} z < 1$. Die Riemannsche Vermutung (Riemann hypothesis, in der englischsprachigen Literatur) besagt, dass sie alle den Realteil $1/2$ haben. Mit dem Nullstellenzählintegral kann man die Anzahl der Nullstellen in einem Rechteck numerisch bestimmen. Die numerischen Methoden erlauben einen exakten Beweis, dass die Nullstellen für beschränktes C auf der kritischen Geraden liegen. Dies wurde für unglaublich große C durchgeführt. Ein Beweis steht aber seit 1859 aus. Es ist aus der Formulierung nicht klar, aber es geht eigentlich um Eigenschaften der Verteilung der Primzahlen. Die Nullstellenfreiheit in einer Umgebung von $\mathrm{Re} z = 1$ ist der sogenannte *Primzahlsatz:* Die Zahl der Primzahlen unter x wächst assymptotisch wie $x/\log(x)$.

Satz 6.12 (Rouché)**.** *Seien f, g holomorph auf einer Umgebung von $B_R(z_0)$. Auf $|z - z_0| = R$ gelte*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Dann haben f und g gleich viele Nullstellen in $B_R(z_0)$.

In der Voraussetzung wird implizit gesagt, dass f keine Nullstelle auf $\partial B_R(z_0)$ hat.

Beweis: Für $0 \le \lambda \le 1$ betrachten wir die Funktion $h_\lambda = f + \lambda(g - f)$. Es ist $h_0 = f$ und $h_1 = g$. Wegen

$$|\lambda(f - g)| \le |f - g| < |f|$$

auf $\partial B_R(z_0)$ verschwindet h_λ auf dem Rand nicht. Wir können daher die Nullstellen mit Zählintegral zählen:

$$N_\lambda = \sum_{z \in B_R(z_0)} \mathrm{ord}_z h_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f' + \lambda(g' - f')}{f + \lambda g} \mathrm{d}\zeta.$$

Der Integrand hängt stetig von λ ab, also auch der Wert N_λ. Da $N_\lambda \in \mathbb{N}_0$, muss dieser Wert konstant sein. $\square$

Beispiel. Wir bestimmen die Anzahl der Nullstellen von $g(z) = z^4 - 4z + 2$ in $B_1(0)$. Wir vergleichen mit z^4. Auf $|z| = 1$ ist

$$|z^4| = 1 < 2 \le |4z - 2|$$

Wir wenden den Satz von Rouché an auf die Funktion $f = 4z - 2$ und g. Also hat g im Inneren des Einheitskreises genauso viele Nullstellen wie f, also eine.

Beispiel. Sei $f(z) = a_n z^n + \dots a_0$ mit $a_n \neq 0$. Wir vergleichen mit $g(z) = a_n z^n$. Es ist

$$|f(z) - g(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| < |z|^n$$

für $R = |z|$ genügend groß. Im Inneren von $B_R(0)$ hat dann f genauso viele Nullstellen wie z^n, also genau n. Dies ist wieder der Fundamentalsatz der Algebra.

Kapitel 7

Riemannscher Abbildunssatz

Jänich Kapitel 10 und Kapitel 8. Vervollständigung des Skriptes folgt später.

Korollar 7.1 (Häufungspunktkriterium)**.** *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet G, deren Konvergenzmenge eine Häufungspunkt hat. Dann konvergiert die Folge kompakt.*

Beweis: Es genügt punktweise Konvergenz zu zeigen. Nach dem Satz von Montel konvergiert eine Teilfolge gegen eine holomorphe Grenzfunktion f. Sei $a \in G$, so dass $(f_n(a))_{n\geq 1}$ nicht gegen $f(a)$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k}(a))_{k\geq 1}$, die gegen einen anderen Wert konvergiert. Nach dem Satz von Montel gibt es eine Teilfolge von $(f_{n_k})_{k\geq 1}$, die gegen eine holomorphe Grenzfunktion g konvergiert. Wir vergleichen f und g. Nach Voraussetzung besitzt die Konvergenzmenge von $(f_n)_{n\geq 1}$ einen Häufungspunkt. In dieser Konvergenzmenge stimmen f und g überein. Nach dem Indentitätssatz folgt $f = g$. Dies ist in a ein Widerspruch. □

Korollar 7.2 (Ableitungskriterium)**.** *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet G. Sei $z_0 \in G$, so dass alle Ableitungsfolgen $f_n^{(k)}(z_0)$ konvergieren. Dann konvergiert die Folge kompakt.*

Beweis: Wie der Beweis des letzten Korollars, zusammen mit dem Satz über die kompakte Konvergenz der Ableitungen. □

Bemerkung. Die volle Bedeutung des Riemannschen Abbildungssatzes wird klar, wenn man ihn aus der Sicht der Topologie gibt. Jedes Gebiet G ist ein (recht gutartiger) topologischer Raum. Dann gibt es einen einfach zusammenhängenden topologischen Raum (die *universelle Überlagerung*) $\tilde{G}$, auf dem die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, z_0)$ operiert, so dass $G \cong \tilde{G}/\pi_1(G, z_0)$. Nach dem *großen*

Riemannschen Abbildungssatz kommen für $\tilde{G}$ nur $\mathbb{C}$, $B_1(0)$ $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in Frage.

Kapitel 8

Elliptische Funktionen

Literatur: Fischer-Lieb, Ahlfors

Elliptische Funktionen sind *doppltperiodische* ganze Funktionen. Eine Zahl a heißt *Periode* der ganzen Funktion f, wenn $f(z+a) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Sind a, b Perioden, so ist auch $a+b$ eine Periode, d.h. die Menge der Perioden von f ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}$.

Lemma 8.1. *Sei f eine ganze, nicht-konstante Funktion, Ω die Menge der Perioden von f. Dann ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ diskret und von der Form $\Omega = 0$ oder $\langle \omega \rangle = \mathbb{Z}\omega$ oder $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit ω_1 und ω_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$.*

Beweis: Angenommen, Ω ist nicht diskret. Wir behaupten, dass dann f konstant gleich $a = f(0)$ ist. Nach Voraussetzung wird dieser Wert in Ω angenommen. Sei z_0 ein Häufungspunkt von Ω in $\mathbb{C}$. Da f stetig ist, gilt auch $f(z_0) = a$. Nach dem Identitätssatz ist $f = a$ auf ganz $\mathbb{C}$.

Untergruppen der Form $\mathbb{Z}\omega$ und $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit ω_1, ω_2 eine $\mathbb{R}$-Basis sind diskret. Wir zeigen, dass es keine anderen gibt.

Sei Ω diskret. Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ enhält nur endlich viele Elemente von Ω. Wir wenden dies an auf Kreisscheiben um0. Wenn $\Omega \neq 0$, dann gibt es ein Element $\omega_1 \in \Omega \smallsetminus \{0\}$ mit $|\omega_1|$ minimal. Ist $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1$, so sind wir fertig. Sonst betrachten wir die Menge $\Omega \smallsetminus \mathbb{Z}\omega_1$. Darin gibt es ein Element ω_2 mit minimalem Betrag.

Behauptung. *ω_2/ω_1 ist nicht reell.*

Andernfalls gibt es eine ganz Zahlen n mit $n < \omega_2/\omega_1 < n+1$. Dann gilt

$$0 < |n\omega_1 - \omega_2| < |\omega_1|$$

im Widerspruch zur Wahl von ω_1.

Behauptung. $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$

Die Zahlen ω_1, ω_2 bilden eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$. Daher kann jedes Element ω von Ω in der Form $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda_i - m_i| \leq 1/2$. Da Ω eine Untergruppe ist, gilt

$$\omega' = \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 \in \Omega.$$

Es gilt

$$|\omega'| < \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2|.$$

In der ersten Ungleichung gilt echt kleiner, da ω_2 kein reelles Vielfaches von ω_1 ist. Nach der Wahl von ω_2 ist dann ω' ein Element von $\mathbb{Z}\omega_1$. □

Definition 8.2. *Eine Untergruppe von $\mathbb{C}$ von der Form $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit ω_1, ω_2 $\mathbb{R}$-linear unabhängig heißt* Gitter *Eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ von der Form*

$$P_\Omega = \{a + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \in \mathbb{C} | 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 2\}$$

(a fest) heißt Fundamentalparallelogramm *von Ω.*

Jede Nebenklasse von Ω in $\mathbb{C}$, d.h. jedes Element von $\mathbb{C}/\Omega$ hat einen eindeutigen Vertreter in P_Ω.
Ab jetzt fixieren wir ein Gitter Ω.

Definition 8.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt* elliptisch *zum Gitter Ω, wenn sie ω-periodisch für alle $\omega \in \Omega$ ist, d.h.*

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega.$$

Sei $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der elliptischen Funktionen zum Gitter Ω.

Hat insbesondere f einen Pol in z, dann auch in allen Elementen von $z + \Omega$.

Bemerkung. Die Integrale beim Berechnen des Umfangs einer Ellipse sind elliptische Funktionen, daher der Name.

Lemma 8.4. *$\mathcal{M}(\Omega)$ ist ein Körper, der $\mathbb{C}$ enthält. Er ist abgeschlossen unter Differenziation.*

Beweis: Offensichtlich sind Summen, Produkte und Quotienten von elliptischen Funktionen wieder elliptisch zum selben Gitter. Z.B.: $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$:

$$(f + g)(z + \omega) = f(z + \omega) + g(z + \omega) = f(z) + g(z) = (f + g)(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega$. Konstante Funktionen sind elliptisch für jedes Gitter. Die Ableitung einer elliptischen Funktion ist ebenfalls elliptisch zum selben Gitter. □

Holomorphe elliptische Funktionen sind uninteressant.

Satz 8.5. *Sei f holomorph und elliptisch. Dann ist f konstant.*

Beweis: Sei P_Ω ein Fundamentalparallelogramm. Dann ist der Abschluss $\overline{P}_\Omega$ beschränkt und abgeschlossen. Da f stetig ist, hat $|f|$ ein Maximum auf P_Ω. Jeder Wert von f wird in P_Ω angenommen, also ist f beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant. □

Satz 8.6. *Sei f elliptisch zum Gitter Ω. Sei P_Ω ein Fundamentalparallogramm, dessen Rand keine Polstellen enthält. Dann gilt*

$$\sum_{z\in P_\Omega} \mathrm{res}_z f = 0.$$

Die Polstellen von f sind isoliert, daher gibt es ein solches Fundamentalparalloelogramm - tatsächlich ist fast jede Wahl eines Eckpunktes ok.

Beweis: Wir wenden den Residuensatz auf die Funktion f und den Weg ∂P_Ω an. Es gilt also

$$2\pi i \sum_{z\in P_\Omega} \mathrm{res}_z f = \int_{\partial P_\Omega} f \mathrm{d}z.$$

Der Rand besteht aus den Strecken $\gamma_1 = [a, a+\omega_1]$, $\gamma_2 = [a+\omega_1, a+\omega_1+\omega_2]$, $\gamma_3 = [a+\omega_1+\omega_2, a+\omega_2]$, $\gamma_4 = [a+\omega_2, a]$. Wegen der Periodiziät von f stimmt das Integral über γ_1 bis auf das Vorzeichen (wegen der entgegengesetzten Richtung) mit γ_3 überein und das Integral über γ_2 bis auf Vorzeichen mit dem von γ_4. In der Summe erhalten wir 0. □

Korollar 8.7. *Sei f eine elliptisch zum Gitter Ω. Sei P_Ω ein Fundamentalparallologramm, dessen Rand keine Polstellen enthält. Angenommen, f hat in P_Ω höchstens einen einfachen Pol. Dann ist f konstant.*

Beweis: Da die Summe der Residuen verschwindet, ist der einfache Pol tatsächlich hebbar. Als holomorphe elliptische Funktion ist f konstant. □

Satz 8.8. *Eine nicht-konstante elliptische Funktion hat im Fundamentalparallelogramm genauso viele Null- wie Polstellen (mit Vielfachheit gezählt). Seien $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ die Null- und Polstellen im Fundamentalparallologramm (jeweils so oft wiederholt, wie die Vielfachheit verlangt). Dann gilt*

$$a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n \mod \Omega.$$

Beweis: Wir wählen das Fundamentparallologramm so, dass der Rand keine Null- oder Polstellen enthält. Mit f ist auch die logarithmische Ableitung elliptisch zum selben Gitter. Mit dem Null- und Polstellenintegral erhalten

$$0 = \int_{\partial P_\Omega} \frac{f'}{f} \mathrm{d}z = \sum_{z\in P_\Omega} \mathrm{ord}_z(f).$$

Für die Summenaussage betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_\Omega} \frac{zf'(z)}{f}\, dz.$$

Der Integrand ist nicht elliptisch, daher verschwindet das Integral nicht. Einerseits erhalten wir die Summe der Residuen. Der Integrand hat einen Pol in den Pol- und Nullstellen von f mit Residuum jeweils $z\mathrm{ord}_z(f)$. Daher erhalten wir als Wert

$$a_1 + \cdots + a_n - b_1 - \cdots - b_n.$$

Andererseits betrachten wir das Wegintegral. Wir zerlegen den Rand ∂P_Ω wie oben.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1+\gamma_3}\frac{zf'}{f}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+\omega_1}\frac{zf'}{f}\mathrm{d}z - \int_{a+\omega_2}^{a+\omega_2+\omega_1}\frac{zf'}{f}\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+\omega_1}\frac{-\omega_2 f'}{f}\\ &= \frac{-\omega_2}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z}\end{aligned}$$

Der Weg $f\circ\gamma_1$ ist geschlossen. Daher berechnet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges und liegt damit in $\mathbb{Z}$. Dasselbe Argument liefert

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2+\gamma_4}\frac{zf'}{f}\mathrm{d}z \in \omega_1\mathbb{Z}.$$

□

Unser nächstes Ziel ist es, die Existenz von elliptischen Funktionen zu zeigen. Tatsächlich werden wir alle elliptischen Funktionen zum Gitter Ω angeben.

Definition 8.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann heißt*

$$\wp(z) = \wp_\Omega(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

Weierstraßsche $\wp$-Funktion*.*

Zunächst müssen wir Konvergenz zeigen. Wir kürzen ab

$$\Omega' = \Omega \setminus \{0\}.$$

Lemma 8.10. *Sei Ω ein Gitter. Dann konvergiert*

$$\sum_{\omega\in\Omega'}\frac{1}{|\omega|^3}.$$

Beweis: Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit ω_1, ω_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Auf $\mathbb{C}$ sind je zwei Normen äquivalent, daher gibt es eine Konstante C, so dass

$$|\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2| \geq C(|\lambda_1| + |\lambda_2|)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Daher ist

$$\sum \frac{1}{|n_1\omega_1 + n_2\omega_2|^3} \leq C^{-3} \sum \frac{1}{(|n_1| + |n_2|)^3}$$

wobei $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. Wir fassen die Summanden mit gleichem $|n_1| + |n_2$ zusammen. Sie liegen auf einem Quadrat mit Seiten parallel zu den Hauptdiagonalen von $\mathbb{C}$. Es gibt $4n$ viele. Also:

$$\sum_{\omega\in\Omega'} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{4}{C^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} < \infty.$$

□

Satz 8.11. *Die Weiersraßsche $\wp$-Funktion konvergiert kompakt auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Sie ist elliptisch und gerade. In den Gitterpunkten hat sie Pole der Ordnung* 2.

Beweis: Wir schätzen die Summanden ab: Sei $R > 0$, $|z| < R$, $|\omega| > 2R$. Dann gilt

$$|\omega - z| \geq \frac{1}{2}|\omega|, \quad |2\omega - z| \leq 3|\omega|$$

und damit

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)}\right| \leq 12\frac{R|\omega|}{|\omega|^4}$$

Wegen des Lemmas konvergiert dann in $B_R(0)$ die Reihe

$$\sum_{|\omega|>2R} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

absolut und gleichmäßig. Die $\wp$-Funktion unterscheidet sich hiervon nur durch endliche viele Summanden, die auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$ holomorph sind. Tatsächlich sind in $\omega \in \Omega \cap B_R(0)$ alle Summanden bis auf denjenigen zu ω holomorph. Daher hat die Funktion in den Gitterpunkten Pole der Ordnung 2.
Die Funktion ist gerade, weil

$$\begin{aligned}\wp(-z) = \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega\in\Omega'} \left(\frac{1}{(-z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \\ = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega'} \left(\frac{1}{(-z-(\omega))^2} - \frac{1}{(-\omega)^2}\right) = \wp(z).\end{aligned}$$

Wegen der kompakten Konvergenz ist die Ableitung gegeben durch

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{\omega\in\Omega'} \frac{-2}{(z-\omega)^3} = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{-2}{(z-\omega)^3}.$$

Diese Funktion ist elliptisch. Daher ist für jedes $\omega \in \Omega$ die Differenz

$$\wp(z+\omega) - \wp(z)$$

konstant. Wir bestimmen diesen Wert für ω_1, ω_2 indem wir $z = -\omega_i/2$ einsetzen. Wir erhalten

$$\wp(\omega_i/2) - \wp(-\omega_i/2) = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\wp$ elliptisch ist. □

Da $\mathrm{res}_\omega \wp = 0$ in allen Gitterpunkten, hat die Funktion eine Stammfunktion.

Definition 8.12. *Sei $\zeta(z)$ die ungerade meromorphe Funktion mit*

$$-\zeta' = \wp.$$

Sie heißt Weierstraßsche ζ-Funktion *zum Gitter Ω.*

Da die Reihe der Funktion $\wp$ kompakt konvergiert, erhalten wir die Stammfunktion durch gliedweises Integrieren:

Lemma 8.13. *Es gilt*

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega'} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}. \right)$$

Sie hat in 0 *das Residuum* 1.

Beweis: Wir integrieren jeden Summanden (außer z^{-2}) über einen Weg von 0 nach z, der alle Pole vermeidet. Mit anderen Worten, die Stammfunktion, die in 0 den Wert 0 hat. Die Konvergenz der angegeben Reihe folgt also aus kompakter Konvergenz. Die Funktion ist ungerade wegen

$$\begin{aligned}\zeta(-z) = \frac{1}{-z} + \sum_{\omega'_\Omega} \left(\frac{1}{-z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \\ = -\frac{1}{z} - \sum_{\omega\in\Omega'} \left(\frac{1}{z+\omega} + \frac{1}{-\omega} + \frac{z}{(-\omega)^2} \right) = -\zeta(z).\end{aligned}$$

Der Hauptteil der Ableitung in 0 ist $-\frac{1}{z^2}$, also hat ζ dort den Hauptteil $\frac{1}{z}$. □

Die ζ-Funktion ist nicht elliptisch, wohl aber ihre Ableitung. Daher sind die Funktionen $\zeta(z+\omega) - \zeta(z)$ für $\omega \in \Omega$ konstant.

Definition 8.14. *Sei* $\eta_i = \zeta(z+\omega_i) - \zeta(z)$ *für* $i = 1, 2$.

Satz 8.15 (Legendre-Relation)**.** *Es gilt*

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i.$$

Beweis: Wir integrieren über den Rand eines Fundamentalparallelogramms, das so gewählt wird, dass der Rand keinen Gitterpunkt enthält. Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ die 4 Strecken wie in den früheren Beweisen. Dann ist

$$\int_{\gamma_1+\gamma_3} \zeta(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} (\zeta(z) - \zeta(z+\omega_2))\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} -\eta_2 \mathrm{d}z = -\eta_2\omega_1$$
$$\int_{\gamma_2+\gamma_4} = \int_{\gamma_4} \zeta(z) - \zeta(z+\omega_1)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_4} -\eta_1 \mathrm{d}z = \eta_1\omega_2$$

Sei $\omega \in \Omega$ der Gitterpunkt in P_Ω. Aus dem Residuensatz folgt dann

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i \mathrm{res}_\omega \zeta(z) = 2\pi i.$$

□

Bemerkung. Die Relation ist von Bedeutung in der Theorie der Perioden. Grothendieck vermutete, dass für bestimmte Ω (nämlich $\mathbb{C}/\Omega$ algebraische Kurve über $\mathbb{Q}$ und ohne komplexe Multiplikation) dies die *einzige* algebraische Relation zwischen diesen vier Zahlen ist.

Die ζ-Funktion hat keine globale Stammfunktion mehr. Aber:

Satz 8.16. *Es gibt eine ungerade ganze Funktion* σ *mit* $\sigma'/\sigma = \zeta$. *Sie hat einfache Nullstellen in* Ω *(und keine weiteren) und erfüllt*

$$\sigma(z+\omega_i) = -\exp(\eta_i(z+\omega_i/2))\sigma(z).$$

Beweis: Wir wählen einen Basispunkt z_0. Durch analytische Fortsetzung definieren wir eine Stammfunktion S der Weierstraßschen ζ-Funktion auf $\mathbb{C} \smallsetminus \Omega$. Da ζ einfache Pole mit Residuum 1 hat, ist diese Stammfunktion nur lokal wohldefiniert. Die verschiedenen Zweige unterscheiden sich durch Addition von Elementen von $2\pi i\mathbb{Z}$. Daher ist

$$\sigma(z) = \exp \circ S$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion. Sie hat die logarithmische Ableitung

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{(\exp \circ S)S'}{\exp \circ S} = S' = \zeta.$$

Wir studieren das Verhalten in 0. Es ist nahe 0

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + h(z)$$

mit einer ungeraden holomorphen Funktion h. Die Stammfunktion des Nebenteils ist holomorph und gerade auf einer Kreisscheibe um 0. Durch Anwenden von exp erhalten wir eine nullstellenfreie ganze und gerade Funktion. Für $1/z$ ist die Stammfunktion log und daher $\exp \circ \log = \mathrm{id}$. Diese Funktion hat eine einfache Nullstelle in 0 und ist ungerade. Insgesamt ist also σ eine holomorphe Funktion mit einer einfachen Nullstelle in 0.

Wir studieren nun das Verhalten unter $z \mapsto z + \omega$ für $\omega \in \Omega$. Für die logarithmische Ableitung haben wir

$$\frac{\sigma'(z+\omega_1)}{\sigma(z+\omega_1)} = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + \eta_1$$

und daher lokal

$$\log \sigma(z+\omega_1) = \log \sigma(z) + \eta_1 z + C_1$$

und sogar global

$$\sigma(z+\omega_1) = \sigma(z) \exp(\eta_1 z + C_1) = \sigma(z) \exp(\eta_1 z) C_2.$$

Wir werten in $z = -\omega_1/2$ aus und erhalten

$$\begin{aligned} \sigma(\omega_1/2) = \sigma(-\omega_1/2) \exp(-\eta_1\omega_1/2) C_2 &= -\sigma(\omega_1/2) \exp(\eta_1\omega_1/2) C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= -\exp(\eta_1\omega_1/2), \end{aligned}$$

wie behauptet. Dieselbe Rechnung gilt auch für ω_2. Man beachte, dass dieselbe Rechnung auch für $\exp \circ S$ gilt, nur eventuell mit einem anderen Wert für C_2.

Aus dem Transformationsverhalten lesen wir auch ab, dass σ in allen Gitterpunkten holomorph ist mit einfachen Nullstellen. □

Bemerkung. Die σ-Funktion kann explizit durch das unendliche Produkt

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Omega'} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp(\frac{z}{\omega +} \frac{1}{2}(z/(\omega)^2)$$

angegeben werden. Wir führen dies nicht weiter aus, weil wir uns mit der Konvergenz von Produkten nicht beschäftigt haben.

Für das weitere benötigen wir die Laurent-Reihenentwicklung von $\zeta(z)$ in 0. Hierfür:

$$\frac{1}{z-\omega} = \frac{-1}{\omega} \frac{1}{1-\frac{z}{\omega}} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{z^k}{\omega^{k+1}} \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} = \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{z^k}{\omega^{k+1}}$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} z^k \sum_{\omega \in \Omega'} -\frac{1}{\omega^{k+1}}$$

Für gerades k verschwindet die Gittersumme.

Definition 8.17. *Sei Ω ein Gitter. Wir setzen*

$$G_k = \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^{2k}}.$$

Wir haben also gezeigt:

Lemma 8.18.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} G_k z^{2k-1}$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)G_k z^{2k-2} = \frac{1}{z^2} + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + \dots$$

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)(2k-2)G_k z^{2k-3} = \frac{-2}{z^3} + 6G_2 z + 20G_3 z^3 + \dots$$

Satz 8.19 (Differentialgleichung der $\wp$-Funktion)**.** *Es gilt*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

wobei

$$g_2 = 60G_2, g_3 = 140G_2.$$

Beweis: Wir berechnen die Hauptteile bis zum konstanten Term und zeigen, dass die Laurentreihenentwicklung der Differenz der beiden Seiten erst mit z^1 beginnt.Dann ist dies eine elliptische holomorphe Funktion, also konstant. Da der konstante Term verschwindet, ist die konstante Funktion die Nullfunktion.

$$\begin{aligned}
(\wp')^2 &= \frac{4}{z^6} + \frac{-24G_2}{z^2} - 80G_3 + \dots \\
(\wp)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_2}{z^2} + 15G_3 + \dots \\
4\wp^3 &= \frac{4}{z^6} + \frac{36G_2}{z^2} + 60G_3 + \dots \\
60G_2\wp &= \frac{60G_2}{z^2} + 0 + \dots
\end{aligned}$$

Und daher

$$(\wp')^2 - 4\wp^3 - 60G_2\wp - 140G_3 = \frac{1}{z^6}(4-4) + \frac{1}{z^2}(-24-36+60)G_2 + z^0(-80-60-140)G_3 + \dots$$

$\square$

Körpertheoretisch gesprochen: $\mathbb{C}(\wp, \wp')/\mathbb{C}(\wp)$ ist eine quadratische Erweiterung. $\mathbb{C}(\wp)/\mathbb{C})$ ist rein transzendent.

Lemma 8.20. *Es gilt*

$$\mathcal{M}(\Omega) = \mathbb{C}(\wp, \wp') = \mathbb{C}(s)[t]/t^2 - 4s^3 - g_2 s - g_3).$$

Beweis: Die zweite Gleichung gilt wegen der Differentialgleichung.
Jede elliptische Funktion kann geschrieben werden als

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)).$$

Hierbei ist der erste Summand geraden, der zweite ungerade. Es genügt daher, ungerade und gerade Funktionen separat zu behandeln. Ist f ungerade, so ist $f/\wp'$ gerade. Daher genügt es zu zeigen, dass jede gerade elliptische Funktion in $\mathbb{C}(\wp)$ liegt.
Die Funktion f nimmt auf $\mathbb{C}/\Omega$ jeden Wert gleich oft an, nämlich so oft wie den Wert ∞. Hierbei zählen wir mit Vielfachheiten. Da f' auf $\mathbb{C}/\Omega$ nur endlich viele Nullstellen hat, werden fast alle Wert nur mit Vielfachheit 1 angenommen. Seien c ein solcher Wert.

Behauptung. *Die Anzahl der c-Stellen in P_Ω ist gerade.*

Sei a eine c-Stelle in P_Ω. Da f gerade ist, ist dann auch $-a$ eine c-Stelle. Da P_Ω ein Fundamentalparallologramm ist, gibt es $\omega \in \Omega$ so dass $-a + \omega \in \Omega$. Angenommen,

$$a = -a + \omega$$

Dann folgt

$$f(a + z) = f(-a + \omega + z) = f(-a + z) = f(a - z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Hieraus folgt

$$f'(a + z) = -f'(a - z) \Rightarrow f'(a) = 0.$$

Nach Voraussetzung verschindet die Ableitung von f aber nicht.
Seien $a_1, \dots, a_k, a'_1, \dots, a'_k$ die c-Stellen von f in P_Ω wobei jeweils $a'_i = -a_i \mod \Omega$.
Sei d ein weiterer solcher Wert mit d-Stellen $b_1, \dots, b_k, b'_1, \dots, b'_k$. Wir betrachten

$$F(z) = \frac{f(z) - c}{f(z) - d}.$$

Diese Funktion ist elliptisch mit einfachen Nullstellen in den a_i, a'_i und Polstellen in den b_i, b'_i. Eine ebensolche Funktion ist

$$G(z) = \frac{(\wp(z) - \wp(a_1))(\wp(z) - \wp(a_2)) \dots (\wp(z) - \wp(a_k))}{(\wp(z) - \wp(b_1))(\wp(z) - \wp(b_2)) \dots (\wp(z) - \wp(b_k))}$$

Daher ist F/G elliptisch ohne Polstellen, also konstant. Dies bedeutet

$$F \in \mathbb{C}(\wp).$$

Es gilt

$$f = \frac{dF - c}{F - 1} \in \mathbb{C}(\wp).$$

□

Üblich ist auch eine andere Art, die Differentialgleichung zu schreiben.

Satz 8.21. *Seien*

$$\varrho_1 = \frac{\omega_1}{2}, \varrho_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \varrho_3 = \frac{\omega_3}{2}.$$

Dies sind genau die Nullstellen von $\wp'$ und es gilt

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

mit $e_i = \wp(\varrho_i)$ paarweise verschieden.

Beweis: Die ϱ_i sind 2-Torsionspunkte von $\mathbb{C}/\Omega$, der letzte ist 0. Es gilt also $\varrho_i = -\varrho_i \mod \Omega$. Da $\wp'$ ungerade ist, folgt

$$\wp'(\varrho_i) = -\wp'(-\varrho_i) = \wp'(\varrho_i) \Rightarrow \wp'(\varrho_i) = 0.$$

Da $\wp'$ Ordnung 3 hat, haben wir alle Nullstellen gefunden. Wäre $e_i = e_j$ für $i \neq j$, so würde der Wert e_i von $\wp$ mit Vielfachheit 4 angenommen, je zweimal in ϱ_i und ϱ_j. Aber $\wp$ hat Ordnung 2.
Wir betrachten

$$f(z) = \wp'(z) - 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

Sie ist gerade und elliptisch. Wegen der Differentialgleichung in der ersten Form hat sie im Fundamentalparallologramm höchstens einen Pol der Ordnung 4. Gleichzeitig hat sie in in jedem ϱ_i eine mindestens doppelte Nullstelle, also Ordnung mindestens 6. Hieraus folgt $f = 0$. □

Zusammen ist also

$$x^3 - g_2 x - g_3 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

Wir kommen nocheinmal auf die Verteilung von Null- und Polstellen von elliptischen Funktionen zurück.

Definition 8.22. *Ein* Divisor *auf* $\mathbb{C}/\Omega$ *ist eine formale Linearkombination*

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i[z_i] \quad a_i \in \mathbb{Z}, z_i \in \mathbb{C}/\Omega.$$

Der Grad $\deg(D)$ *ist gegeben als* $\sum_{i=1}^n a_i \in \mathbb{Z}$. *Sei* $\mathrm{Div}(\Omega)$ *die abelsche Gruppe der Divisoren auf* $\mathbb{C}/\Omega$ *und* $\mathrm{Div}^0(\Omega)$ *die Untergruppe der Divisoren vom Grad 0.*

Ist $f \neq 0$ elliptisch zum Gitter Ω, so heißt

$$(f) = \sum_{z \in P_\Omega} \mathrm{ord}_z f[z]$$

Hauptdivisor *zu f. Sei* $\mathrm{Div}(\Omega)$ *die abelsche Der Quotient*

$$\mathrm{Cl}(\Omega) = \mathrm{Div}(\Omega)/\mathit{Hauptdivisoren}$$

heißt Divisorenklassengruppe *von $\mathbb{C}/\Omega$. Sei*

$$\mathrm{Cl}^0(\Omega) = \mathrm{Div}^0(\Omega)/\mathit{Hauptdivisoren.}$$

Lemma 8.23. *(i) Die Abbildung $\mathcal{M}(\Omega)^* \to \mathrm{Div}(\Omega)$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathbb{C}^*$. Insbesondere ist das Bild eine Untergruppe. Das Bild liegt in $\mathrm{Div}^0(\Omega)$.*

(ii) Die Abbildung $\deg : \mathrm{Div}(\Omega) \to \mathbb{Z}$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Sie faktorisiert über $\mathrm{Cl}(\Omega)$ und hat Kern $\mathrm{Cl}^0(\Omega)$.

(iii) Die Summationsabbildung

$$\mathrm{Div}(\Omega) \to \mathbb{C}/\Omega, \quad \sum_{i=1}^n a_i[z_i] \mapsto \sum_{i=1}^n a_i z_i$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Die Untergruppe der Hauptdivisoren liegt im Kern.

Beweis: Die erste Aussge gilt, da $\mathrm{ord}_z fg = \mathrm{ord}_z f + \mathrm{ord}_z g$. Im Kern liegen die elliptischen Funktionen ohne Null-und Polstellen, also die Konstanten. Elliptische Funktionen haben gleich vielen Null- wie Polstellen, d.h der Divisor hat Grad 0. Die erste Aussage über deg ist trivial. Sie faktorisiert, da Hauptdivisoren im Kern liegen.
Die Aussage über die Summationsabbildung ist Satz 8.8. □

Wenn Sie die Sprache der exakten Sequenzen kennen: Wir fassen unser Wissen zusammen:

$$0 \to \mathbb{C}^* \to \mathcal{M}(\Omega)^* \to \mathrm{Div}(\Omega) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Theorem 8.24 (Abel)**.** *Die Abbildung*

$$\mathrm{Cl}^0(\Omega) \to \mathbb{C}/\Omega$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $\mathrm{Cl}^0(\Omega) \to \mathbb{C}/\Omega$. Wir wissen bereits, dass sie wohldefiniert ist. Ein Element $z \in \mathbb{C}/\Omega$ hat das Urbild $[z] - [0]$, also ist sie surjektiv. Die eigentlich Aussage ist also:

Behauptung. *Sei $D = \sum_{i=1}^n a_i[z_i]$ ein Divisor vom Grad* 0 *mit* $\sum_{i=1}^n a_i z_i \in \Omega$. *Dann ist D ein Hauptdivisor.*

Wir schreiben den Divisor als $D = \sum_{i=1}^m [a_i] - \sum_{i=1}^n [b_i]$ wobei a_i wiederholt werden, aber $a_i \neq b_j$ für alle i, j. Wir wählen Repräsentanten der Elemente in $\mathbb{C}/\Omega$, so dass

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_i.$$

Wir verwenden die σ-Funktion und betrachten

$$f(z) = \frac{\prod_{i=1}^m \sigma(z - a_j)}{\prod_{i=1}^n \sigma(z - b_j)}.$$

Diese Funktion hat genau die richtigen Null-und Polstellen und ist meromorph. Für ω_j gilt

$$\begin{aligned} f(z + \omega_j) &= \frac{\prod_{i=1}^m (-1)\exp(\eta_j(z - a_i) + \omega_j/2)\sigma(z - a_i)}{\prod_{i=1}^m (-1)\exp(\eta_j(z - b_i) + \omega_j/2)\sigma(z - b_i)} \\ &= \exp(\sum a_i - \sum b_i) f(z) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

Also ist f elliptisch. □

Bemerkung. Der ursprüngliche Beweis benutzt die die θ-Funktion

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}$$

wobei $\Omega = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Die Reihe ist kompakt konvergent und 1-periodisch. Weiter gilt

$$\theta(\tau, z + \tau) = e^{-\pi i + 2z}\theta(\tau, z).$$

Einzige Nullstelle ist $\varrho_2 = \frac{1+\tau}{2}$. Als Funktion von τ handelt es sich um eine Modulform. Die Theorie der elliptischen Funktionen wird vollständig durch die θ-Funktion bestimmt.

Modulformen

Bisher haben wir das Gitter festgehalten, nun wollen wir es variieren. Dabei kommt es uns nur auf den zugehörigen Körper von elliptischen Funktionen an. Sei $\alpha \in \mathbb{C}^*$, Ω ein Gitter. Dann ist auch $\alpha\Omega$ ein Gitter, und es gilt

$$\mathcal{M}(\Omega) \cong \mathcal{M}(\alpha\Omega), \quad *f(z) \mapsto f(\alpha^{-1}z).$$

Definition 8.25. *Wir nennen zwei Gitter Ω, Ω' äquivalent, wenn es eine komplexe Zahl α gibt mit $\alpha\Omega = \Omega'$.*

Wir wollen die Äquivalenzklassen von Gittern verstehen. Nach Definition wird ein Gitter festgelegt durch die Wahl eines Paares (ω_1, ω_2) von komplexen Zahlen ungleich 0 mit $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$. Durch Vertauschen der Basisvektoren erreichen wir $\omega_2/\omega_1 > 0$. Wann erzeugen zwei Vektoren dasselbe Gitter? Genau dann, wenn es eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt, so dass $\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1$, $\omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1$. (Die Determinatenbedingung sorgt dafür, dass die Orientierung der Basis erhalten bleibt.) Bis auf Äquivalenz wird daher jedes Gitter erzeugt durch ein Paar $(1, \tau)$ mit

$$\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(\tau) > 0\}.$$

Die Operation der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ drückt sich aus durch

$$(1, \tau) \mapsto (c\tau + d, a\tau + b) \mapsto (1, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}).$$

Dies ist die Standardtransoperation als *Möbiustransformation*. Zusammen zeigt dies:

Satz 8.26. *Die Äquivalenzklassen von Gittern stehen in Bijektion mit der Menge* $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Zwei prominente Element der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sie operieren als

$$\tau \mapsto \tau + 1, \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}.$$

Satz 8.27. *Die beiden Elemente S und T erzeugen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Jede Bahn wird repräsentiert durch ein Element der Menge*

$$F = \{\tau \in \mathbb{H} || \mathrm{Re}\tau| \leq 1/2, |\tau| \geq 1\}.$$

Sind zwei Elemente aus F in der selben Bahn, so liegen sie auf dem Rand.

Ein Beweis findet sich in diversen Büchern über Modulformen, z.B. in Serres: A course in arithmetic, auch in Ahlfors: complex analysis.

Definition 8.28. *Eine* ganze Modulform *vom Gewicht $k \in \mathbb{N}_0$ ist eine holomorphe Funktion*

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

die Funktionalgleichung

$$f(\tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^k} f(A\tau)$$

für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erfüllt, und der Grenzwert

$$f(\infty) \lim_{\mathrm{Im}\tau \to \infty} f(\tau)$$

existiert.

Speziell für $A = T$und S erhalten wir

$$f(\tau) = f(\tau+1), f(\tau) = \frac{1}{(\tau)^k} f(-\frac{1}{\tau}).$$

Für die Matrix $-\,\mathrm{id}$ erhalten wir

$$f(\tau) = (-1)^k f(\tau).$$

Daher verschwinden alle Modulformen von ungeradem Gewicht.

Bemerkung. Wie jede 1-periodische Funktion hat f eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \tau}.$$

Mit $q = e^{2\pi\tau}$ kann dies als Laurenreihe in einer punktierten Kreisscheibe um ∞ gesehen werden. Die Existenz des Grenzwertes bedeutet dann, dass die Fourier-Entwicklung erst in 0 beginnt und $c_0 = f(\infty)$.

Satz 8.29. *Für $k \geq 2$ ist die Funktion*

$$G_k(\tau) = G_k(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) = \sum_{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2)'} \frac{1}{(n+m\tau)^{2n}}$$

eine ganze Modulform vom Gewicht $2k$. Es gilt

$$G_k(\infty) = 2\zeta(k)$$

wobei $\zeta(z)$ die Riemannsche Zeta-Funktion ist.

Diese Funktionen heißen *Eisensteinreihen.*

Beweis: Die absolute Konvergenz der Reihe haben wir bereits gezeigt. Etwas genaueres Hinsehen liefert auch die kompakte Konvergenz. Nach Definition hängt G_k nur vom Gitter, nicht von der Basis ab. Wegen der Homogenität der Reihe gilt

$$G_k(\alpha\Lambda) = \alpha^{2k} G_k(\Lambda)$$

und daher

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= \sum \frac{1}{(n(c\tau+d) + m(a\tau+b))^{2n}} \\ &= \frac{1}{(c\tau+d)^{2k}} \sum \frac{1}{(1+\frac{a\tau+b}{c\tau+d})^{2k}} \\ &= \frac{1}{(c\tau+d)^{2k}} G_k(A\tau). \end{aligned}$$

Wir berechnen den Grenzwert $\mathrm{Im}\tau \to \infty$ innerhalb des Streifens $|\mathrm{Re}\tau| \leq 1/2$. Wegen der kompakten Konvergenz dürfen wir termweise rechnen. Der Summand

$$\frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}$$

hat den Grenzwert 0 falls $m \neq 0$. Für $m = 0$ erhalten wir $1/n^{2k}$. Beim Summieren erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 2\zeta(2k).$$

□

Tatsächlich erzeugen die Eisensteinreihen die gesamte Algebra von ganzen Modulformen. Allgemeiner definiert man auch Modulformen für die Untergruppen $\Gamma(n) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, der Kern der Reduktion $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Die Zahl n heißt dann *Level* der Modulform. Dann erhält man viel mehr Funktionen. Zu festem Gewicht und Level ist der Raum der Modulformen stets endlich-dimensional von bekanntem Gewicht. Modulformen sind ein extrem wichtiger Gegenstand der Zahlentheorie und allgemeiner arithmetischen Geometrie.

Kapitel 9

Ausblick

Die Grundlagen der Funktionentheorie und die wichtigsten Sätze haben wir kennengelernt. Die Theorie setzt sich in verschiedene Richtungen fort:

Mehr eindimensionale Theorie

- Produktentwicklungen und holomorphe Funktionen zu vorgegebenen Divisoren
- Werteverteilungstheorie
- komplexe lineare Differentialgleichungen, insbesondere Differentialgleichugnen mit regulären Singularitäten
- Theorie der Modulformen
- L-Reihen und analytische Zahlentheorie

Die beiden letzten Aspekte (genauer Ausschnitte daraus) sind Gegenstand des Seminars.

Mehrdimensionale Funktionentheorie

Die Theorie von komplex differenzierbaren Funktionen in mehreren Variablen. Diese Vorlesung wird nur sehr selten gelesen. Wenig überraschend lassen sich Funktionen wieder als Potenzreichen schreiben etc. Interessant ist der *Hebbarkeitssatz*: Ist eine Funktion auf dem Komplement einer Menge von Kodimension 2 definiert, so ist sie holomorph auf diese Menge fortsetzbar. Dieses Phänomen sehen wir in Dimension 1 noch nicht.

Riemannsche Flächen

Eine Riemannsche Fläche ist einfach eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Die Sätze der FT lassen sich entsprechend verallgemeinern. In der

Vorlesung im Winter soll es dann vor allem um *kompakte* Riemannsche Flächen gehen. Unsere Sätze über elliptische Funktionen haben eine Vorgeschmack gegeben.

Komplexe Geometrie

Die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten ist einerseits nahe verwandt der algebraischen Geometrie, andererseits der Riemannschen Geometrie.

Inhaltsverzeichnis