Mathematisches Institut, Arithmetische Geometrie, Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Probeklausur: "Funktionentheorie I" SS 2016

Datum und Uhrzeit:	–
Prüfungsdauer:	3 Stunden
Raum:	–
Erlaubte Hilfsmittel:	1 handbeschriebenes DIN A4 Blatt
Prüfer:	Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Zusätzliche Blätter sind nur einseitig zu beschreiben.
- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Prüfungsunfähigkeit

Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß der Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weiter Informationen hierzu können auf den Internetseiten des Prüfungsamtes nachgelesen werden.

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	8		
Aufgabe 2	8		
Aufgabe 3	8		
Aufgabe 4	8		
Aufgabe 5	6		
Aufgabe 6	8		
Aufgabe 7	8		
Summe:	**54**		

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Formulieren Sie den Residuensatz:

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie nur eine knappe Begründung, z.B. ein Gegenbeispiel (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!).

1. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ist dann die Grenzfunktion $f(z) := \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(z)$ wieder holomorph?

2. Besitzt $\log(z)$ bei $z = 0$ eine Polstelle?

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit unendlich vielen Nullstellen. Ist f dann notwendig konstant null?

4. Ist jede Polstelle der Funktion $\frac{1}{\sin z}$ von gerader Ordnung?

5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit unendlich vielen Nullstellen. Gilt dann notwendigerweise
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z?$$

6. Sei
$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
eine Reihe mit Konvergenzradius > 1 und wir wollen annehmen, dass f keine Nullstellen innerhalb des Konvergenzradius besitzt. Besitzt dann die Funktion $1/f(z)$ ebenfalls eine Potenzreihe um $z = 0$ mit Konvergenzradius > 1?

Aufgabe 2: (8 Punkte)
Sei $r \geq 1$ eine natürliche Zahl. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z+2)\cdots(z+r)} \mathrm{d}z$$

für den Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) := 2r \cdot e^{2\pi i t}.$$

Geben Sie eine ausführliche Begründung für alle Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

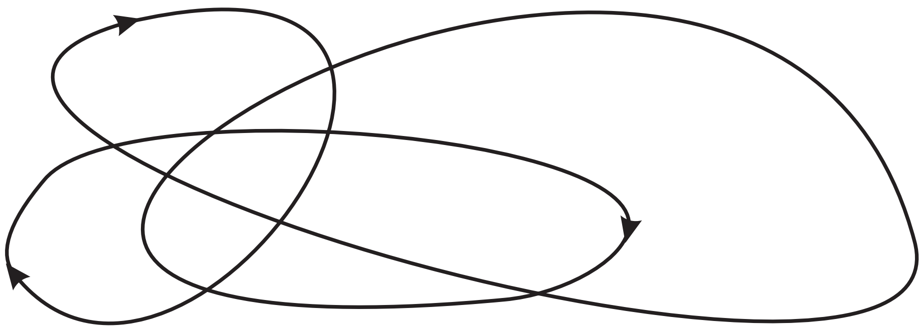
mit den Methoden der Funktionentheorie-Vorlesung.

Aufgabe 4: (8 Punkte)
Bestimmen Sie (mit Beweis!) alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen in $\mathbb{C}$, geben Sie deren Typ an (also z.B. *hebbar* oder *wesentlich*). Geben Sie auch die zwei Terme niedrigster Ordnung der Laurententwicklung, sowie das Residuum an:

1. $$f(z) := \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$
   (definiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0, 1, 2$)

2. $$g(z) := \frac{z\sin(z)}{z^3 - z}$$
   (definiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0, 1, -1$)

Aufgabe 5: (6 Punkte)
Geben Sie (ohne weitere Begründung) die Umlaufzahlen der Punkte außerhalb der skizzierten Kurve an:



Aufgabe 6: (8 Punkte)
Sei

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Abbildung und

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

die Potenzreihenentwicklung um $z = 0$ mit $|a_1| > 1$. Beweisen Sie, dass es einen Punkt $w \in B_1(0)$ in der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ gibt, sodass $f(w) \notin B_1(0)$.

Aufgabe 7: (8 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Sei A_Ω die Menge aller elliptischer Funktionen zum Gitter Ω, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. f ist bei allen $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ holomorph, und
2. bei allen $z \in \Omega$ hat f eine Polstelle von Ordnung $0, 1$ oder 2.

Dann ist A_Ω ein komplexer Vektorraum. Berechnen Sie seine Dimension.