Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 1

Ausgabe: 25.4.2016, **Abgabe:** 2.5.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aufgefasst, wissen wir bereits aus der Vorlesung, dass die Ableitung die Gestalt

$$Df = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

besitzt. Beweisen Sie, dass es $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$Df = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(Interpretieren Sie dies geometrisch! Da die Ableitung die lokale lineare Annäherung an eine Funktion darstellt, lernen wir, dass holomorphe Funktionen lokal wie ... aussehen.)

(3 Punkte)

Aufgabe 1.2: Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ definieren wir den Logarithmus als

$$\log z := \log|z| + i \arg z,$$

wobei $\arg z$ die eindeutige Zahl $\varphi \in (-\pi, +\pi)$ bezeichnet, sodass $z = |z|\, e^{i\varphi}$ (φ heißt *Argument* von z).

1. Zeigen Sie mit den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, dass $\log z$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorph ist.
2. Berechnen Sie die Ableitung $\log'(z)$.
3. Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, $\log z$ zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ fortzusetzen.

(6 Punkte)

Aufgabe 1.3: Wir definieren eine Funktion f durch die folgende Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n.$$

Aus der Analysis I wissen wir bereits, dass für $z \in \mathbb{R}$ (und innerhalb des Konvergenzradius) die Gleichung $f(z) = \log z$ gilt.

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.
2. Bestimmen Sie die Ableitung $f'(z)$.
3. Zeigen Sie, dass $f(z) = \log(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$ gilt. (Tipp: Die Ableitung von $f(z) - \log(z)$ hilft hier erheblich weiter. Nutzen Sie dann einen Satz aus der Analysis II).

(6 Punkte)