Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 10

Ausgabe: 27.6.2016, **Abgabe:** 4.7.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen von

$$e^z - 1 = 2z$$

in der offenen Kreisschreibe $\{z \mid |z| < 1\}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.2: Sei $R > 0$ eine reelle Zahl. Konstruieren Sie eine konkrete biholomorphe Abbildung von

$$U := \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in (0, R) \text{ und } \varphi \in (0, \frac{\pi}{10})\}$$

auf die offene Einheitskreisscheibe $B_1(0)$. (Es genügt nicht zu sagen, dass eine solche Abbildung nach dem Riemannschen Abbildungssatz existieren muss. Vielleicht inspiriert Sie Aufgabe 10.3)

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3:

1. Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine biholomorphe Abbildung. Beweisen Sie, dass f dann die Form
$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$
für $\theta \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in B_1(0)$ besitzen muss. Zeigen Sie auch, dass alle Abbildungen dieser Form $B_1(0)$ biholomorph auf sich selbst abbilden.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$f(z) := \frac{z - i}{z + i}$$
die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ biholomorph auf die komplexe obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ abbildet. Geben Sie auch die inverse Abbildung konkret an.

3. Beweisen Sie, dass es einen Isomorphismus von Gruppen

$$\mathrm{Aut}(B_1(0)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

gibt, wobei $\mathrm{Aut}(X)$ jeweils die Gruppe der biholomorphen Abbildungen $X \to X$ bezeichnet.

(6 Punkte)

Aufgabe 10.4: Es ist oft sehr schwierig, die Biholomorphie aus dem Riemannschen Abbildungssatz konkret zu machen. Ein eher einfaches System von Biholomorphien, die Gebiete in $\mathbb{H}$ ineinander transformieren, kommt von der folgenden Konstruktion:
Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right). \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $\gamma(A)$ für jede Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ in der Tat eine Biholomorphie von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ definiert.
2. Zeigen Sie, dass γ ein Gruppenhomomorphismus ist.
3. Beschreiben Sie geometrisch (in Worten), was die Abbildungen

$$\gamma\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \qquad \gamma\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{H}$ tun.

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.5: Beweisen Sie, dass es einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Aut}(B_1(0)) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ gibt.

(6 Punkte)