Übungen zur Vorlesung “Funktionentheorie”
SS16 Blatt 12

Ausgabe: 11.7.2016, **Abgabe:** 18.7.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Dies ist das letzte Aufgabenblatt des Semesters. Nächste Woche wird es stattdessen eine Probeklausur geben.

Aufgabe 12.1: Sei f eine nicht-konstante elliptische Funktion zum Gitter Ω. Beweisen Sie, dass es stets ein Fundamentalparallelogramm P_Ω gibt, sodass dessen Rand keine Null- oder Polstellen enthält.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und ω_1, ω_2 eine Basis des Gitters, d.h.

$$\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2.$$

Sei $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix, die in der üblichen Weise auf $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ operiert (d.h. wir nutzen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und lassen die Matrizen durch lineare Transformationen wirken). Zeigen Sie, dass die Vektoren $\gamma(\omega_1), \gamma(\omega_2)$ ebenfalls eine Basis des gleichen Gitters Ω bilden.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.3: In der Vorlesung gibt es den folgenden Satz (Satz 8.6 im Skript): Sei f elliptisch zum Gitter Ω und P_Ω ein Fundamentalparallelogramm, dessen Rand keine Polstellen enthält. Dann gilt

$$\sum_{z \in P_\Omega} \mathrm{res}_z(f) = 0.$$

Wir wollen hier ein Analogon für rationale Funktionen beweisen:

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, die im Unendlichen eine hebbare Singularität oder eine Polstelle besitzt (siehe Blatt 5). Wir definieren das *Residuum im Unendlichen* als

$$\mathrm{res}_\infty f := \mathrm{res}_0 \left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right),$$

d.h. als das Residuum einer anderen Funktion bei 0.

1. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $R > 0$ gibt (die von f abhängt), sodass
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = -\operatorname{res}_\infty f.$$
2. Beweisen Sie, dass
$$\sum_{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_z f = 0. \tag{1}$$
Argumentieren Sie, dass diese a priori unendliche Summe wohldefiniert ist, da $\operatorname{res}_z f \neq 0$ nur für endlich viele Punkte z eintreten kann.
3. Folgern Sie, dass
$$\sum_{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \operatorname{ord}_z f = 0,$$
wobei die Ordnung von f bei z bezeichnet (d.h. eine Nullstelle n-ter Ordnung bei z hat $\operatorname{ord}_z f = n$ und eine Polstelle n-ter Ordnung hat $\operatorname{ord}_z f = -n$).

(5 Punkte)

Aufgabe 12.4: Geben Sie einen neuen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra, indem Sie die vorherige Aufgabe auf Polynome anwenden.

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.5: Historisch wurde das Gebiet der elliptischen Funktionen begründet, als man versucht hat, Integrale der Form
$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}\,\mathrm{d}w$$
zu berechnen. Wir wollen den Zusammenhang erläutern:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Sei $\wp$ die Weierstraß $\wp$-Funktion dieses Gitters. In der Vorlesung werden wir bald beweisen, dass es Zahlen $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ gibt, sodass die Differentialgleichung
$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$
gilt. Sie dürfen diese Aussage schon jetzt verwenden.

1. Sei $g : U \to \mathbb{C}$ eine in einer offenen Menge U definierte Umkehrfunktion von $\wp|_{g(U)}$ und $\sqrt{\cdot} : U \to \mathbb{C}$ eine auf U definierte Quadratwurzel. Beweisen Sie, dass
$$g'(w) = \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$$
gelten muss.

2. Sei U nun zusätzlich ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Die Idee wäre nun, dass

$$G(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}} \, \mathrm{d}w$$

(jedenfalls bis auf Addition einer Konstante) die Funktion g ergibt. Formulieren Sie dies präzise, z.B. welcher Weg für γ_z gewählt werden muss. Folgern Sie, dass G die Einschränkung einer elliptischen Funktion auf U ist.

3. Wir definieren ein reelles Integral

$$S(r) := \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

für $1 \geq r \geq 0$. Erklären Sie, wie man S auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$, das $(0, 1)$ nicht-leer schneidet, fortsetzt. Sei h eine lokale Umkehrfunktion. Zeigen Sie, dass

$$h(-s) = -h(s) \qquad \text{und} \qquad h(is) = ih(s)$$

gelten (sofern h an diesen Punkten definiert ist).

4. Definieren Sie

$$\omega := 2S(1)$$

und zeigen Sie, dass

$$h(\frac{\omega}{2}) = 1 \qquad h(\omega) = 0 \qquad h(s+\omega) = h(-s),$$

sofern h an diesen Werten definiert ist. Folgern Sie, dass dann die Gleichungen

$$h(s+2\omega) = h(s)$$
$$h(s+2i\omega) = h(s)$$

gelten. Folgern Sie, dass h die Einschränkung einer elliptischen Funktion auf die von Ihnen gewählte offene Menge ist. Geben Sie das zugehörige Gitter an.

(10 Punkte)