Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 3

Ausgabe: 9.5.2016, **Abgabe:** 23.5.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Wichtige Information: In der Woche der Pfingstpause (16.-21. Mai) wird es ein Übungsblatt mit Bonusaufgaben geben. Die Abgabe dieses nächsten Blatts 4 ist dann freiwillig, aber man kann Punkte für die Gesamtpunktzahl sammeln. Das aktuelle Blatt geht ganz normal in die Wertung ein.

Aufgabe 3.1:

1. Bezeichne $\operatorname{ord}_z(f) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ die Ordnung einer Nullstelle einer bei z holomorphen Funktion f. Zeigen Sie, dass falls f und g beide bei z holomorphe Funktionen sind, die Identität

$$\operatorname{ord}_z(f \cdot g) = \operatorname{ord}_z(f) + \operatorname{ord}_z(g)$$

gilt.

2. Betrachten Sie die Nullstellen $z := n\pi$ (mit $n \in \mathbb{Z}$ beliebig) von

$$f(z) := \begin{cases} z\frac{\sin(z)}{e^z - 1} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Geben Sie die Vielfachheiten der Nullstellen an. Ist diese Funktion bei $z = 0$ stetig, ist sie komplex differenzierbar?

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2:
Wir definieren eine reelle Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Aus der Analysis I wissen wir, dass g eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion mit $g^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$ ist. Sie dürfen diese Tatsache ohne weiteren Beweis in dieser Aufgabe verwenden. Da die Definition von g wortwörtlich auch für alle $x \in \mathbb{C}$ Sinn macht, wollen wir g nun als Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auffassen.

1. Zeigen Sie, dass g für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ beliebig oft komplex differenzierbar ist.
2. Prüfen Sie, ob g bei $z = 0$ stetig ist.
3. Prüfen Sie, ob g bei $z = 0$ komplex differenzierbar ist. (Hinweis: Man kann dies direkt prüfen, oder aber unser Wissen zu den reellen Taylor-Polynomen nutzen.)

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch $z \mapsto z^3$ gegeben ist.

1. Zeichnen Sie eine Skizze der Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{z \mid \operatorname{Re} f(z) \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ B &:= \{z \mid \operatorname{Im} f(z) \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ C &:= \{z \mid |f(z)| \in \{0, 1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

2. Versuchen Sie schriftlich zu erklären, wie die entsprechenden Mengen für die Funktion $z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{N}$ aussehen sollten.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.4: Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Wir wollen das folgende Integral berechnen, welches uns schon in der Analysis I hätte begegnen können:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos(t)^2 + b^2 \sin(t)^2} \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Allerdings wollen wir die Methoden der Funktionentheorie nutzen. Wir gehen wie folgt vor:

1. Wir definieren zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= a \cos(2\pi t) + ia \sin(2\pi t) \\ \gamma_2(t) &:= a \cos(2\pi t) + ib \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

   Fertigen Sie eine Skizze an! Beweisen Sie, dass

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} \mathrm{d}z.$$

   (Tipp: Integralsatz)

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral über γ_1 konkret.
3. Vereinfachen Sie das Kurvenintegral über γ_2 soweit wie möglich und schreiben Sie es als

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = u + iv \qquad \text{mit} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

4. Verbinden Sie diese Schritte, um das reelle Integral in Zeile 2 zu berechnen.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.5: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nur Werte auf dem Einheitskreis und der reellen Achse annimmt, d.h. für jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass mindestens

$$|f(z)| = 1 \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{Im} f(z) = 0$$

wahr ist. Zeigen Sie, dass f notwendig konstant sein muss.

(3 Punkte)