Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 6

Ausgabe: 30.5.2016, **Abgabe:** 6.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlen. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ Wege. Gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, so definieren wir die *Komposition* der Wege als

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(analog zu Blatt 2).

1. Seien $\gamma_1', \gamma_2' : [0,1] \to U$ Wege, die jeweils zu γ_1 resp. γ_2 homotop sind, d.h. $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ und $\gamma_2 \sim \gamma_2'$. Zeigen Sie, dass dann auch $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \sim \gamma_1' \cdot \gamma_2'$ gilt.

2. Sei $\gamma_3 : [0,1] \to U$ ein Weg mit $\gamma_3(0) = \gamma_2(1)$. Zeigen Sie, dass

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \sim \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3).$$

3. Sei $a \in U$. Folgern Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(U, a)$ in der Tat eine Gruppe ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.2: Eine analytische Fortsetzung muss keineswegs immer existieren. Wir betrachten die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n \geq 0} z^{n!}.$$

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius. Wir wollen ihn ρ nennen.

2. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Weg mit $\gamma(0) = 0$ und dessen Endpunkt strikt außerhalb des Konvergenzkreises liegt, d.h. $|\gamma(1)| > \rho$. Zeigen Sie, dass f keine analytische Fortsetzung entlang γ besitzt.

(Hinweis: Was ist $\lim\limits_{z \to \rho, z \in \mathbb{R}} f(z)$? Betrachten Sie $f(ze^{2\pi i r})$ für $r \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl und $z \to \rho$ reell.)

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $a \in U$ ein Punkt. Wir definieren eine Menge $\mathcal{O}_a$ als Äquivalenzklassen

$$\mathcal{O}_a := \left((U, f) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \text{ eine offene Umgebung von } a \text{ und} \\ f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph.} \end{array} \right) \Big/ \approx ,$$

wobei $(U_1, f_1) \approx (U_2, f_2)$ falls $f_1 |_V = f_2 |_V$ für eine offene Umgebung V von a gilt mit $V \subseteq U_1 \cap U_2$. Elemente von $\mathcal{O}_a$ heißen *Funktionskeime.*

Sei $f : U_a \to \mathbb{C}$ eine in einer Umgebung U_a von a definierte und holomorphe Funktion. Falls $\gamma : [0, 1] \to U$ ein geschlossener Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = a$ ist und eine analytische Fortsetzung entlang γ existiert, so schreiben wir

$$f \cdot \gamma : U'_a \to \mathbb{C} \tag{1}$$

für diese Funktion. Hier ist U'_a wieder eine Umgebung von a.
Sei $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und f eine Stammfunktion, die in einer Umgebung von a definiert ist.

1. Formulieren Sie präzise, inwiefern f ein Element von $\mathcal{O}_a$ definiert.
2. Die Menge U'_a sowie $f \cdot \gamma$ in Zeile sind a priori nicht wohldefiniert. Beweisen Sie, dass $[f \cdot \gamma]$ als Element von $\mathcal{O}_a$ wohldefiniert ist.
3. Zeigen Sie, dass falls γ und γ' homotope geschlossene Wege sind, die von a nach a gehen, in $\mathcal{O}_a$ schon $[f \cdot \gamma] = [f \cdot \gamma']$ gilt.
4. Folgern Sie, dass die Fundamentalgruppe eine Rechtswirkung $\mathcal{O}_a \times \pi_1(U, a) \longrightarrow \mathcal{O}_a$ definiert.

(5 Punkte)

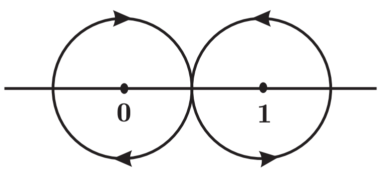
Aufgabe 6.4: Die Funktion

$$D(z) := \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

definiert einen Funktionskeim bei $z = \frac{1}{2}$, d.h. $[D] \in \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}$. In hinreichend kleinen offenen Kreisscheiben U um $z = \frac{1}{2}$ kann diese Funktion auch als

$$D(w) = -\int_\gamma \frac{\log(1 - z)}{z} \, \mathrm{d}z$$

für einen beliebigen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ von 0 nach $w \in U$ dargestellt werden. Wir definieren zwei Wege als “Schlaufen um 0 und 1”,



und schreiben γ_0 für diejenige um Null, sowie γ_1 für diejenige um Eins.

1. Berechnen Sie $[D] \cdot \gamma_0$. (Tipp: Ist die Singularität von $\log(1-z)/z$ bei $z = 0$ hebbar?)

2. Berechnen Sie $[D] \cdot \gamma_1$. (Tipp: Entwickeln Sie $\frac{\log(1-z)}{z} = \frac{\log(1-z)}{1-(1-z)}$ in eine geometrische Reihe und führen Sie eine geeignete partielle Integration durch)

3. Berechnen Sie $[D] \cdot \gamma_0\gamma_1$ und $[D] \cdot \gamma_1\gamma_0$.

(6 Punkte)