Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie"
SS16 Blatt 8

Ausgabe: 13.6.2016, **Abgabe:** 20.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: In der Vorlesung wurde bereits das Residuum definiert (Skript, Definition 4.5). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion und $u \in U$.

1. Zeigen Sie, dass falls f bei u einen Pol n-ter Ordnung besitzt und $n \geq 1$, die Gleichung
$$\mathrm{res}_u(f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to u} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \Big((z-u)^n f(z) \Big)$$
gilt. Beachten Sie, dass sich die $(n-1)$-te Ableitung auf die gesamte Klammer bezieht.

2. Sei $n \geq 2$ gegeben. Wir betrachten die meromorphe Funktion
$$g(z) := \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi z)}{(z-1)(z-2)(z-3)\cdots(z-n)}$$
auf $\mathbb{C}$. Berechnen Sie die Residuen $\mathrm{res}_u(g)$ für $u \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Sei $F : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f. Beweisen Sie, dass $\mathrm{res}_u(f) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Sei $R(s,t) := \frac{P(s,t)}{Q(s,t)}$, wobei P und Q Polynome in zwei Variablen sind und Q nicht konstant null. Wir wollen Integrale der Form
$$E := \int_0^{2\pi} R(\cos\alpha, \sin\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$
berechnen.

1. Zeigen Sie, dass dieses Integral dem Kurvenintegral
$$E = -i \int_\gamma R\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right) \frac{1}{z} \mathrm{d}z$$
entspricht, wobei $\gamma(t) := e^{2\pi i t}$.

2. Berechnen Sie mit dieser Methode das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{b+\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha.$$

für $b > 1$ reell.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.3: Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale mit dem Residuensatz:

1. $$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) := e^{2\pi i t},\ t \in [0,1]$$

2. $$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z-10)^4}\frac{1}{z(z-\frac{1}{2})}\mathrm{d}z \qquad \text{mit} \qquad \gamma(t) := 2e^{2\pi i t},\ t \in [0,1]$$

(4 Punkte)

Aufgabe 8.4: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit den Methoden, die wir gerade in der Vorlesung gelernt haben:

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

2. Sei $t > 0$ eine reelle Zahl.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.5: Prüfen Sie die Rechnung

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

für $n \geq 2$ nach. (Hinweis: Sei $R > 1$ beliebig. Nutzen Sie den Residuensatz für eine Kurve von 0 nach R, von dort nach $R \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und von dort wieder nach 0. Lassen Sie dann R gegen $+\infty$ streben).

(6 Punkte)