Übungen zur Vorlesung “Funktionentheorie”
SS16 Blatt 9

Ausgabe: 20.6.2016, **Abgabe:** 27.6.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/ftheorie/ftheorie16.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x,$$

indem Sie es als Teilstück eines Kurvenintegrals über eine geeignet gewählte Kontur interpretieren.
(Achtung: Wenn Sie die dritte Wurzel statt nur auf $\mathbb{R}$ für ein Kurvenintegral auch im Komplexen benutzen wollen, müssen Sie sorgfältig auf die Wohldefiniertheit achten!)

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2: Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\, \mathrm{d}t$$

für alle $n \geq 1$ mit den Methoden der Funktionentheorie.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3: Wir wollen das Integral

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \log \sin t dt \tag{1}$$

berechnen. Dazu werden wir die folgende Methode nutzen:

1. Zeigen Sie, dass

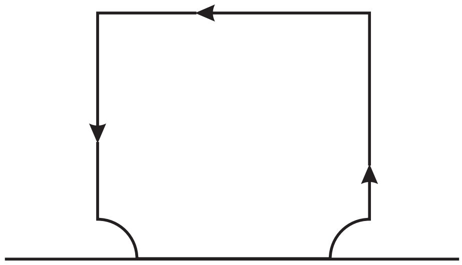
$$1 - e^{2iz} = -2ie^{iz}\sin(z) = 1 - e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x)$$

für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt. Folgern Sie, dass diese Funktion lediglich für $x = k\pi$ und $y \leq 0$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) in $\mathbb{R}_{\leq 0}$ liegt.

2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \log(1 - e^{2iz})\mathrm{d}z$$

über eine geeignet gewählte Kurve γ. Die Skizze



soll hier als Inspiration dienen, wobei die linke bzw. rechte Kante die x-Koordinate 0 bzw. π habe. Achten Sie darauf, dass Sie die Kurve so wählen müssen, dass der Integrand wohldefiniert ist (siehe Aufgabenteil 1).

3. Zeigen Sie, dass das Integral über die obere Kante gegen Null strebt, wenn man die obere Kante nach oben verschiebt.

4. Schätzen Sie die Integrale über die Viertelkreise nach oben ab und zeigen Sie, dass ihr Wert gegen Null strebt, wenn man den Radius der Viertelkreise gegen Null laufen lässt.

5. Folgern Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \log(-2ie^{it} \sin t)\mathrm{d}t = 0$$

gilt. Nutzen Sie dies, um das Integral in Gleichung 1 zu berechnen. (Achtung: Für komplexe $x, y \in \mathbb{C}$ gilt die Funktionalgleichung $\log(xy) = \log x + \log y$ nicht notwendigerweise!)

Bemerkung: Das Integral kann auch mit völlig anderen Methoden berechnet werden. Wir wollen uns auf die obige Methode beschränken.

(9 Punkte)