Tutorium zur kommutativen Algebra SS17

Aufgabe 1.1: Skizzieren Sie die Mengen:

1. Sei a eine Konstante.
$$X_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a\}$$
Beschreiben Sie wie sich die Wahl von a auswirkt.

2. Sei a eine Konstante.
$$X_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = a\}$$
Beschreiben Sie wie sich die Wahl von a auswirkt. Wenn wir stattdessen $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ betrachten, gibt es eine Verbindung zu X_1?

3. $$X_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$$

4. $$X_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - y^2 - z^2 = 0\}$$

5. $$X_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - x(x-1)(x-2) = 0\}$$

Aufgabe 1.2: Wir betrachten die Menge
$$X := \{(t^2, t^3) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}.$$
Zeigen Sie, dass X eine algebraische Menge ist.

Aufgabe 1.3: Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine endliche oder abzählbare Teilmenge mit mindestens einem Element. Wir betrachten die Menge
$$Y := \{(t, t) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C} \setminus M\}.$$
Zeigen Sie, dass Y keine algebraische Menge ist.
(Tipp: Falls Polynome $f_1, \dots f_m$ die algebraische Menge definieren, betrachten Sie die Polynome $g_i(t) := f_i(t, t)$. Wo verschwinden sie?)

Aufgabe 1.4: Welche Mengen beschreiben einen Ring?

1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit den üblichen Rechenoperationen.
2. Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei die Rechenoperation punktweise definiert ist.
3. Die Teilmenge $A \subset \mathbb{Q}$ der Zahlen, die eine Darstellung der Form $\frac{b}{2^n}$ besitzen für $b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$?

4. Die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektor Kreuzprodukt $a \times b$ und der üblichen Addition.
5. Die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$, wobei wir Addition und Multiplikation durch Rechnen modulo 4 erklären.
6. Sei R ein Ring. Wir definieren die Menge aller Folgen

$$M := \left\{ a = (a_i)_{i \geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in R \text{ für alle } i, \text{ und} \\ a_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele Indizes} \end{array} \right\}$$

mit den Operationen

$$\begin{aligned} (a+b)_i &:= a_i + b_i \\ (a \cdot b)_i &:= \sum_{\substack{p+q=i \\ p,q \geq 0}} a_p b_q. \end{aligned}$$

Kennen Sie diese Struktur unter einem anderen Namen?
7. Sei R ein Ring. Wir definieren die Menge aller Folgen

$$M' := \{a = (a_i)_{i \geq 0} \mid a_i \in R\}$$

mit den Operationen

$$\begin{aligned} (a+b)_i &:= a_i + b_i \\ (a \cdot b)_i &:= \sum_{\substack{p+q=i \\ p,q \geq 0}} a_p b_q. \end{aligned}$$

8. Sei R ein Ring. Wir definieren die Menge aller Folgen

$$M' := \{a = (a_i)_{i \geq 0} \mid a_i \in R\}$$

mit den Operationen

$$\begin{aligned} (a+b)_i &:= a_i + b_i \\ (a \cdot b)_i &:= a_i \cdot b_i. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.5: Geben Sie eine Divisionstabelle mit den Einträgen $\frac{a}{b}$ für alle $a \in \mathbb{F}_3$ und $b \in \mathbb{F}_3$, $b \neq 0$, an.

Aufgabe 1.6: Ist $\mathbb{Z}/4$ ein Körper?