Tutorium zur kommutativen Algebra SS17
SS17 Blatt 10

Ausgabe: 3.7.2017, **keine Abgabe**

Definition: Sei R ein Ring. Das *Jacobson-Radikal* von R ist der Schnitt $J(R) := \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ über die Menge aller maximalen Ideale in R läuft.

Aufgabe T.10.1: Sei S eine multiplikative Menge in A. Zeigen Sie, dass

$$(S^{-1}A)[X] \cong S^{-1}(A[X]).$$

Aufgabe T.10.2: Sei $R \subseteq R'$ eine endliche Ringerweiterung und S eine multiplikative Menge in R.

1. Beweisen Sie, dass
$$S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}R'$$
ebenfalls endlich ist.
2. Geben Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass $R \longrightarrow S^{-1}R'$ nicht notwendigerweise endlich ist.

Aufgabe T.10.3: Berechnen Sie die Dimension der folgenden Varietäten:

1. $V(X_1^2 + X_2^2 + 1)$ in $\mathbb{A}^3$
2. $V(X_1^2 - X_2^2, X_3)$ in $\mathbb{A}^4$
3. $V(X_1 - 3X_2, X_1 + 6X_2 + 10X_3, 4X_1 + 20X_6)$ in $\mathbb{A}^6$
4. $V(X_1, X_2)$ in $\mathbb{A}^2$
5. $V(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$ in $\mathbb{P}^3$

(Achten Sie auf irreduzible Komponenten!)

Aufgabe T.10.4: *(Lemma von Nakayama)* Sei R ein Ring. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $I \subseteq J(R)$ ein Ideal, welches im Jacobson-Radikal enthalten ist. Zeigen Sie, dass aus $I \cdot M = M$ folgt, dass $M = 0$.

(Tipp: Zeigen Sie zunächst: Es gilt $x \in J(R)$ genau dann, wenn $1 - xy$ für alle $y \in R$ eine Einheit ist, d.h. eine multiplikative Inverse besitzt)