Tutorium zur kommutativen Algebra SS17
SS17 Blatt 11

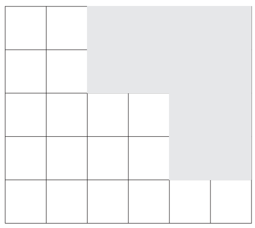
Ausgabe: 11.7.2017, **keine Abgabe**

Aufgabe T.11.1: Berechnen Sie die Hilbert-Funktion von $\mathbb{C}[X, Y, Z, W]/(X^2 - Y^2)$.

Aufgabe T.11.2: Ein Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n]$ nennt man *monomial*, falls es von Elementen der Form $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ erzeugt wird. Bestimmen Sie die Werte $\phi(d)$ für $d = 1, \ldots, 8$ für

$$k[X, Y]/(X^3Y, X^2Y^4).$$

Nutzen Sie dafür eine graphische Darstellung der Monombasis und lassen Sie sich durch die Skizze



inspirieren.
(Tipp: Zählen Sie Kästchen auf den Diagonalen)

Aufgabe T.11.3: Wir definieren einen graduierten Ring R, indem wir als zugrundeliegenden Ring $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ betrachten, aber eine neue Graduierung festlegen, in der

$$\deg X = 2, \qquad \deg Y = 3, \qquad \deg Z = 4.$$

Bestimmen Sie die Werte der Hilbert-Funktion $\phi(d)$ für kleine Werte von d.

Definition: Sei R ein Ring. Ein R-Modul $M \neq 0$ heißt *einfach* wenn er keine Untermoduln bis auf 0 oder sich selbst besitzt.

Aufgabe T.11.4: Bestimmen Sie alle einfachen Moduln

1. über dem Ring $\mathbb{C}[T]$,
2. über dem Ring $\mathbb{R}[T]$.

Aufgabe T.11.5: Sei R ein Ring.

1. Beweisen Sie, dass die einfachen Moduln über R genau alle Moduln von der Gestalt $R/\mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ sind.
2. Beweisen Sie, dass falls M, N einfache R-Moduln sind, jeder Homomorphismus $\varphi : M \to N$ entweder die Nullabbildung oder ein Isomorphismus ist.