Tutorium zur kommutativen Algebra SS17
SS17 Blatt 3

Ausgabe: 8.5.2017, **keine Abgabe**

Aufgabe T.3.1: Prüfen Sie, ob die folgenden Ideale in $k[x,y]$ gleich sind:

1. $(x+y, x-y)$ und (x,y)
2. (x^2, y) und (x,y)
3. (x,y) und (x^2, xy, y^2)
4. $(x+xy, y+xy, x^2, y^2)$ und (x,y).

Aufgabe T.3.2: Ist $R' \subset R$ ein Unterring von einem noetherschen Ring R, ist R' dann notwendigerweise noethersch? Gegenbeispiel oder Beweis.

Aufgabe T.3.3: Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und Ideale I_1, I_2 mit einem Ring-Isomorphismus

$$R/I_1 \cong R/I_2$$

aber $I_1 \neq I_2$.

Aufgabe T.3.4: Sei R ein Ring und M, M' R-Moduln.

1. Zeigen Sie, dass die Menge der R-Modulhomomorphismen $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ mit $(r \cdot \varphi)(m) := r\varphi(m)$ selbst ein R-Modul ist.
2. Wir definieren die direkte Summe $M \oplus M'$ als die Menge $M \times M'$ mit der Skalarmultiplikation
$$r \cdot (m, m') := (rm, rm').$$
Zeigen Sie, dass $M \oplus M'$ wieder ein R-Modul ist.

Aufgabe T.3.5: Aus der Vorlesung wissen wir, dass ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus $\phi : V \to V$ äquivalent zu einer Struktur von V als $\mathbb{C}[x]$-Modul ist.
Diskutieren Sie, dass falls V endlich-dimensional ist, die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Endomorphismus ϕ ist nilpotent, $\phi^N = 0$.
2. Der $\mathbb{C}[x]$-Modul ist isomorph zu $\mathbb{C}[x]/(x^N)$ für ein $N \geq 1$.

Tipp: Schreiben Sie konkret auf, wie x auf der $\mathbb{C}$-Vektorraumbasis $1, x, x^2, \ldots, x^{N-1}$ von $\mathbb{C}[x]/(x^N)$ operiert.

Aufgabe T.3.6: Betrachten Sie für

$$f := x^{12}(x - y^2)(y - x + \sqrt{2}) \in \mathbb{C}[x, y]$$

die Verschwindungsmenge $V(f)$. Sei

1. $P_1 := \{(n^2, n) \in \mathbb{A}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $P_2 := \{(4n^2, 2n) \in \mathbb{A}^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
3. $P_3 := \mathbb{Z}^2 \cap V(f)$
4. $P_4 := \mathbb{Q}^2 \cap V(f)$
5. $P_5 := (\mathbb{Q}[\sqrt{2}])^2 \cap V(f)$,

wobei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ die Menge der Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ bezeichnet. Bestimmen Sie jeweils den Abschluss von P_i in der Zariski-Topologie. Geben Sie für Ihre Antwort jeweils eine Skizze.