Tutorium zur kommutativen Algebra SS17
SS17 Blatt 5

Ausgabe: 22.5.2017, **keine Abgabe**

Aufgabe T.5.1: Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorff-Raum* falls für alle Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ stets offene Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni y$ mit $U \cap V = \varnothing$ existieren. Beweisen Sie: Ein Hausdorff-Raum X ist noethersch genau dann wenn X eine endliche Menge ist.

Aufgabe T.5.2: Geben Sie ein maximales Ideal des Ringes $\mathbb{R}[X]$ an, welches widerlegt, dass der Nullstellensatz auch über den reellen Zahlen gilt.

Aufgabe T.5.3: Geben Sie ein detailliertes Argument:

1. Der topologische Raum $\mathbb{A}^1$ mit der Zariski-Topologie hat Dimension 1.
2. Der topologische Raum $\mathbb{A}^n$ mit der Zariski-Topologie hat Dimension $\geq n$.

Aufgabe T.5.4: Wir betrachten die Hyperbel $H \subset \mathbb{A}^2$, die durch das Ideal

$$I := (xy - 1)$$

in $k[x, y]$ definiert wird.

1. Wie viele Zusammenhangskomponenten hat H in der üblichen Topologie der reellen Zahlen falls $k = \mathbb{R}$?
2. Wie viele Zusammenhangskomponenten hat H in der üblichen Topologie der komplexen Zahlen falls $k = \mathbb{C}$?
3. Wie viele Zusammenhangskomponenten hat H in der Zariski-Topologie für k beliebig? Ist H irreduzibel?
4. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}(H)$ nicht zum Ring $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1)$ isomorph ist.

Aufgabe T.5.5: Sei k ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Element. Zeigen Sie: Gilt $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$, dann gilt $f = 0$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für den Fall eines Körpers k mit nur endlich vielen Elementen.