Tutorium zur kommutativen Algebra SS17
SS17 Blatt 8

Ausgabe: 19.6.2017, **keine Abgabe**

Aufgabe T.8.1: Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$$[s : t] \longmapsto [x : y : z] := [s^2 : st : t^2]$$

einen Morphismus projektiver Varietäten definiert.

1. Zeigen Sie, dass das Bild von φ durch $S := V(XZ - Y^2)$ gegeben ist.
2. Konstruieren Sie eine inverse Abbildung $\varphi^{-1} : S \to \mathbb{P}^1$.

Aufgabe T.8.2: Sei $S := V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2$.

1. Zeigen Sie, dass $\psi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow S$ mit

   $$t \longmapsto (t^2, t^3)$$

   einen Morphismus definiert.
2. Zeigen Sie, dass $\psi(x, y) := \frac{y}{x}$ auf einer offenen Teilmenge von S eine Inverse definiert.
3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}^1$ und S nicht isomorph sind.

Definition: Ein *graduierter Ring* ist ein Ring R, mitsamt Untergruppen $(R_i)_{i\geq 0}$ bezüglich der Addition, sodass

$$R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$$

als abelsche Gruppe gilt, und $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ für alle $i, j \geq 0$ unter Multiplikation.

Aufgabe T.8.3: Sei R ein Ring. Ein Polynom $f = \sum a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \neq 0$ in $R[X_1, \dots, X_n]$ heißt *homogen von Grad d* falls

$$a_{i_1,\dots,i_n} = 0 \qquad \text{sobald} \qquad i_1 + \cdots + i_n \neq d.$$

Wir schreiben $R[X_1, \dots, X_n]_d$ für den R-Untermodul von $R[X_1, \dots, X_n]$, der durch die homogenen Polynome von Grad d erzeugt wird.

1. Seien f_1, f_2 homogen von Grad d_1 bzw. d_2. Zeigen Sie, dass $f_1 \cdot f_2$ homogen von Grad $d_1 + d_2$ ist. Sei $d_1 = d_2$. Zeigen Sie, dass entweder $f_1 + f_2 = 0$ oder $f_1 + f_2$ wieder homogen von Grad d_1 ist.

2. Sei f homogen von Grad d. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in R^\times$ die Gleichung

$$f(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d \cdot f(X_1, \ldots, X_n) \tag{1}$$

gilt. Zeigen Sie: Falls R ein Körper mit unendlich vielen Elementen ist, so gilt auch die Umkehrung.

3. Zeigen Sie, dass der Polynomring bezüglich

$$S = \bigoplus_{i \geq 0} R[X_1, \ldots, X_n]_i$$

die Struktur eines graduierten Rings besitzt.

Aufgabe T.8.4: Geben Sie ein nicht-homogenes Polynom über einem endlichen Körper an, welches dennoch Gleichung (1) für alle λ erfüllt.